目　　录

第一章 高维布朗运动与牛顿位势

§1. 势论大意

(一) 势论的物理背景．古典势论起源于物理，后来抽象成为数学的一分支．根据电学中的库仑定律，两个异性电荷互相吸引，引力方向在其联线上，力的大小为

$$F = c \cdot \frac{Qq}{r^2},$$

其中 Q 与 q 分别为二电荷的数量，r 为二者在 R^3 中的距离，c 为某常数，与单位有关．为了研究引力，最好引进势的概念．设在 x_0 处有一电荷 q_0，它在任一点 x $(x \neq x_0)$ 处所产生的势，等于把一单位电荷从无穷远移到点 x 处所作的功．势与此电荷在到达 x 以前所走的路径无关．势的值为

$$\frac{1}{2\pi} \frac{q_0}{|x - x_0|}. \tag{1}$$

常数 $1/2\pi$ 依赖于单位的选择，并非本质．

今设有 m 个电荷 q_i，分别位于点 $x_i (i = 1, 2, \cdots, m)$，可视

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, \cdots, & x_m \\ q_1, & q_2, \cdots, & q_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

为一离散的电荷分布．这组电荷在点 x $(x \neq x_i)$ 处所产生的势仍定义为把单位电荷自无穷远处移到 x 所作的功．由于力和功都是可加的，故此势为

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{|x - x_i|}. \tag{3}$$

现在假设电荷按照测度 μ 分布．由上式的启发，自然称由 μ 所产生的在点 x 的势为

$$G\mu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^3}\frac{\mu(dy)}{|x-y|}. \tag{4}$$

以后会证明，如 $\mu(R^3)<\infty$，则关于勒贝格测度 L，对几乎一切 x，$G\mu(x)<\infty$（见引理 3）．

（4）式定义一积分变换 G，它把测度 μ 变为函数 $G\mu$．下面会看到，变换的核 $1/2\pi|x-y|$ 恰好等于三维布朗运动转移密度对时间 t 的积分．这正是把布朗运动与牛顿位势联系起来的桥梁之一．

在物理中，势论所研究的，主要是电荷分布 μ、势以及借助于它们而定义的各种量间的关系．作为这种量的例，可举出电荷分布 μ 的能 I_μ(energy)，它是势对此 μ 的积分，即

$$I_\mu=\int_{R^3}G\mu(x)\mu(dx)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^3}\int_{R^3}\frac{\mu(dy)\mu(dx)}{|x-y|}. \tag{5}$$

电荷分布的全电荷是 $Q=\mu(R^3)$．如果把全部电荷 Q 散布在某导体上，它们便会重新分布，使得在此导体所占的集 A 上，势是一常数．记此新分布为 μ_0，它具有下列能的极小性：

$$I_{\mu_0}=\min_\mu(I_\mu:\ \mu(R^3)=Q,\ \llcorner\mu\subset A),$$

其中 $\llcorner\mu$ 表 μ 的支集 (support)，它是一切使 $\mu(U)=0$ 的开集 U 的和的补集．μ_0 所决定的分布形态，在物理中称为平衡态．对紧集 $E(\subset R^3)$，如存在 μ 使 $\llcorner\mu\subset E$，而且 $G\mu(x)=1$，$(\forall x\in E)$，则称 $G\mu$ 为 E 的平衡势；具有平衡势的集称为平衡集；而 $\mu(E)$ 则称为 E 的容度，记为 $C(E)$．因此，导体 E 的容度，是为了在此导体上产生单位势的全电荷．以上诸概念来自物理，以后还要从数学上重新定义．下

面简述古典势论中的一些结果，其中有些以后会用概率方法加以证明。下设 μ 为有穷测度。

电荷分布的唯一性：势 $G\mu$ 唯一决定 μ.

势的决定：$G\mu$ 被它在 $_L\mu$ 上的值所决定。

平衡势唯一：一集最多有一平衡势。

平衡势的刻画：设平衡集 E 的平衡势为 $G\mu_0$，则

$$G\mu_0(x) = \inf(G\mu(x);\ G\mu(x) \geqslant 1,\ \forall x \in E). \tag{6}$$

平衡势的能：如平衡集 E 的能有穷，则在所有支集含于 E、全电荷等于 E 的容度的电荷分布 μ 所对应的势中，平衡势 $G\mu_0$ 的能 $I\mu_0$ 极小；即

$$I\mu_0 = \int_{R^3} (G\mu_0)d\mu_0 = \min_{G\mu}\left(\int_{R^3} (G\mu)d\mu;\ {}_L\mu\subset E,\right.$$

$$\left.\mu(E) = C(E)\right). \tag{7}$$

控制原理：对于二势 $h = G\mu$，$\bar{h} = G\bar{\mu}$，如处处有 $h \geqslant \bar{h}$，则 $\mu(R^3) \geqslant \bar{\mu}(R^3)$.

投影（Balayage）原理：设已给势 $h = G\mu$ 及闭集 E，则存在势 $\bar{h} = G\bar{\mu}$，满足

$$\bar{h}(x) = h(x),\ (\forall x \in E);\ \bar{h}(x) \leqslant h(x),\ (\forall x \in R^3); \tag{8}$$

$$_L\bar{\mu}\subset E;\ \bar{\mu}(R^3) \leqslant \mu(R^3). \tag{9}$$

此外，还满足：$\forall x$

$$\bar{h}(x) = \inf_{v}(Gv(x);\ Gv(x) \geqslant h(x),\ \forall x \in E;\ {}_Lv\subset E) \tag{10}$$

$$= \sup_{v}(Gv(x);\ Gv(x) \leqslant h(x),\ \forall x \in E;\ {}_Lv\subset E). \tag{11}$$

称 $\bar{h}$ 为 h 的投影势（Balayage potential）。

下包络原理：诸势的逐点下确界也是势。

（二）若干引理．考虑 n 维欧氏空间 R^n，其中的点记为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它与原点的距离为 $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$．对 $r>0$，记

$$B_r=(x: |x| \leqslant r); \quad \mathring{B}_r=(x: |x|<r);$$
$$S_r=(x: |x|=r).$$

它们分别是以原点为中心、r 为半径的球，开球和球面．

引理 1. 设 $f(y)$ 为一元函数，$y \geqslant 0$，如下式左方积分存在，则

$$\int_{B_r} f(|x|) d x=\frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^r s^{n-1} f(s) d s. \qquad (12)$$

其中 Γ 表 Gamma 函数．

证．为计算

$$\int_{B_r} f(|x|) d x=\underset{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2}{\int \cdots \int} f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) d x_1 \cdots d x_n.$$

引进极坐标

$$x_1=s \cos \varphi_1, \quad x_2=s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \cdots,$$
$$x_n=s \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},$$

$$\int_{B_r} f(|x|) d x=\int_0^r s^{n-1} f(s) d s \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d \varphi_1 \cdots$$
$$\cdots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{n-3} d \varphi_{n-3} \cdot \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d \varphi_{n-2}$$
$$\cdot \int_0^{2\pi} d \varphi_{n-1}.$$

利用公式

$$\int_0^\pi \sin^{a-1} \varphi d \varphi=\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right),$$

化简后即得(12)#

在(12)中取 $f=1$，并利用公式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \tag{13}$$

即得球 B_r 的体积 $|B_r|$ 为

$$|B_r|=\pi^{n/2}r^n\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right). \tag{14}$$

对 r 微分，得球面 S_r 的面积 $|S_r|$ 为

$$|S_r|=2\pi^{n/2}r^{n-1}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \tag{15}$$

球面 S_r 上的勒贝格测度记为 $L_{n-1}(dx)$. 以 $U_r(dx)$ 表 S_r 上的均匀分布，即

$$U_r(dx)=L_{n-1}(dx)/|S_r|. \tag{16}$$

系 1. 设函数 $K(x)(x\in R^n)$ 的积分有意义，则

$$\int_{R^n}K(x)\,dx=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^\infty\left[\int_{S_r}K(x)U_r(dx)\right]r^{n-1}dr. \tag{17}$$

证. 左方积分等于

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{S_r}K(x)L_{n-1}(dx)dr\\&\quad=\int_0^\infty\left[\int_{S_r}K(x)U_r(dx)\right]|S_r|dr,\end{aligned}$$

以(15)代入即得(17)#

引理 2. 下列积分是 y 的有界函数

$$A(y)=\int_{B_r}\frac{dx}{|x-y|^{n-2}}\quad(n\geqslant 2). \tag{18}$$

证. 以 $\chi_D(x)$ 表集 D 的示性函数，它等于 1 或 0，视 $x\in D$ 或 $x\bar{\in}D$ 而定. 则对任意 $\delta>0$，有

$$A(y)=\int_{R^n}\frac{\chi_{B_r}(x)}{|x-y|^{n-2}}dx=\int_{R^n}\frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}dx$$

$$\leqslant \int_{|x|\leqslant\delta} \frac{dx}{|x|^{n-2}} + \int_{|x|>\delta} \frac{\chi_{B_r}(x+y)}{|x|^{n-2}}\,dx.$$

由(12)，右方第一积分等于 $\pi^{n/2}\delta^2/\Gamma(n/2)$；第二积分不大于

$$\frac{1}{\delta^{n-2}} \int_{|x|>\delta} \chi_{B_r}(x+y)\,dx \leqslant \frac{1}{\delta^{n-2}} \int_{R^n} \chi_{B_r}(x+y)dx$$

$$= \frac{|B_r|}{\delta^{n-2}} \quad \#$$

注 1. 其实，易见 $A(y)$ 的上确界在 $y=0$ 达到.

以"v-a.e."表"关于测度 v 几乎处处"；以 $\mathscr{B}^n$ 表 R^n 中全体 Borel 集所成的 σ 代数；$(R^n, \mathscr{B}^n)$ 上的勒贝格测度记为 L.

引理 3. 设 μ 为 $(R^n, \mathscr{B}^n)$ 上有穷测度，$n\geqslant 2$，则

$$\int_{R^n} \frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}} < \infty \quad (L\text{-a.e.}). \tag{19}$$

证. 以 K 表(18)中 $A(y)$ 的一上界，有

$$\int_{B_r}\int_{R^n} \frac{\mu(dx)}{|x-y|^{n-2}}\,dy = \int_{R^n}\left(\int_{B_r} \frac{dy}{|x-y|^{n-2}}\right)\mu(dx)$$

$$\leqslant K\mu(R^n) < \infty.$$

故(19)中积分在 B_r 上有穷 $(L\text{-a.e.})$，再由 $R^n=\bigcup\limits_{r=1}^{\infty} B_r$（$r$ 为正整数)，即得证(19)#

以 C_0 表 R^n 上全体连续且满足 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$ 的函数 $f(x)$ 的集.

引理 4. 设 $f\in C_0$ 而且 L-可积，则当 $n\geqslant 3$，有

$$g(y) = \int_{R^n} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-2}}\,dx \in C_0.$$

证.

$$|g(y)-g(y_0)| = \left|\int_{R^n} \frac{f(y+x)-f(y_0+x)}{|x|^{n-2}}dx\right|$$

$$\leqslant 2\|f\|\int_{|x|<\delta}\frac{dx}{|x|^{n-2}} + \frac{1}{\delta^{n-2}}\int_{|x|\geqslant\delta}|f(y+x) - f(y_0+x)|dx, \quad \ldots \tag{20}$$

其中 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 如引理 2 证明所述, 可选 $\delta > 0$ 充分小, 使 (20) 中右方第一项小于 $\varepsilon/2$. 固定此 δ, 由勒贝格收敛定理, 当 $y \to y_0$ 时, 第二项趋于零. 此得证 $g(y)$ 的连续性.

为证 $\lim_{|y|\to\infty} g(y) = 0$, 任取 $0 < r < s$, 则

$$g(y) = \left(\int_{|x|\geqslant s} + \int_{s>|x|>r} + \int_{r\geqslant|x|}\right)\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 f 可积, 可选 s 充分大, 以使

$$\left|\int_{|x|\geqslant s}\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx\right| \leqslant \frac{1}{s^{n-2}}\int_{R^n}|f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3};$$

次取 r 充分小, 以使

$$\left|\int_{r\geqslant|x|}\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx\right| \leqslant \|f\|\int_{r\geqslant|x|}\frac{dx}{|x|^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{3};$$

最后

$$\left|\int_{s>|x|>r}\frac{f(x+y)}{|x|^{n-2}}dx\right| \leqslant \frac{1}{r^{n-2}}\int_{s>|x|}|f(x+y)|dx.$$

由于 $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, 存在 $a > 0$, 当 $|y| > a$ 时, 上式右方项小于 $\varepsilon/3$. 综合上述, 当 $|y| > a$ 时, $|g(y)| < \varepsilon$#

§2. 布朗运动略述

(一) 定义. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间, 其中 $\Omega = (\omega)$ 是基本事件 ω 所成的集, $\mathscr{F}$ 为 Ω 中子集的 σ 代数, P 为 $\mathscr{F}$ 上

的概率测度. 考虑定义在此空间上的随机过程 $\{x(t,\omega), t\geqslant 0\}$，它取值于 R^n. 有时也记 $x(t,\omega)$ 为 $x_t(\omega)$ 或 $x(t)$ 或 x_t.

称 X 为 n 维布朗运动，如果它满足：

(i) 对任意有限多个数 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m$，

$$x(t_1), x(t_2)-x(t_1), \cdots, x(t_m)-x(t_{m-1})$$

相互独立；

(ii) 对任意 $s\geqslant 0$, $t>0$，增量 $x(s+t)-x(s)$ 有 n 维正态分布，密度为

$$p(t,x)=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),\quad (x\in R^n); \tag{1}$$

(iii) 对每一固定的 ω, $t\to x(t,\omega)$ 连续.

这样的过程的确存在(证可参看文献 [22] § 3.4 或 [17]).

(1) 式给出 $x_{s+t}-x_s$ 的密度；至于 x_t 的分布，则依赖于开始分布，即 x_0 的分布. 设

$$\mu(A)=P(x_0\in A),\quad A\in\mathscr{B}^n.$$

由 $x_t=(x_t-x_0)+x_0$ 及 (i) 和卷积公式，得

$$P(x_t\in A)=\int_A\left[\int_{R^n}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\cdot\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)\mu(dx)\right]dy. \tag{2}$$

为了强调开始分布 μ 的作用，记

$$P_\mu(x_t\in A)=P(x_t\in A). \tag{3}$$

引理 1 (正交不变性). 设 H 是 R^n 中正交变换，则 $HX=\{Hx_t, t\geqslant 0\}$ 也是 n 维布朗运动.

证. $$Hx_{s+t}-Hx_s=H(x_{s+t}-x_s)$$

只依赖于 $x_{s+t}-x_s$，故由 X 的增量独立性即得 HX 的增量独立性. 其次，X 对 t 连续，故 HX 亦然. 最后，由 (1)，$x_{s+t}-x_s$ 有特征函数为

$$Ee^{i(x_{s+t}-x_s,y)}=e^{-(y,y)t/2},\quad (y\in R^n). \tag{4}$$

由于正交变换保持内积不变，并利用(4)以及 H^{-1} 也是正交变换，得

$$\begin{aligned}Ee^{i(H(x_{s+t}-x_s),y)}&=Ee^{i(x_{s+t}-x_s,H^{-1}y)}\\&=e^{-(H^{-1}y,H^{-1}y)t/2}=e^{-(y,y)t/2},\end{aligned} \tag{5}$$

故 $Hx_{s+t}-Hx_s$ 也有分布密度为(1)。

类似易见：

平移不变性. 设定点 $a\in R^n$，则 $\{x_t+a, t\geqslant 0\}$ 也是布朗运动；

尺度不变性. 设常数 $c>0$，则 $\left\{\frac{x(ct)}{\sqrt{c}}, t\geqslant 0\right\}$ 也是布朗运动.

（二）转移密度 $p(t,x,y)$ 的性质. 定义

$$p(t,x,y)=p(t,y-x)=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right), \tag{6}$$

其中 $t>0$，$x\in R^n$，$y\in R^n$. 由(2)可见，如 $x_0(\omega)=x$，或 μ 集中在点 x 上，并记 P_μ 为 P_x，则有

$$P_x(x_t\in A)=\int_A p(t,x,y)dy. \tag{7}$$

故直观上可理解 $p(t,x,y)$ 为：作布朗运动的粒子，自点 x 出发，于时刻 t 转移到点 y 附近的转移密度. 显然，它关于 x, y 是对称的.

下列简单定理是布朗运动与牛顿位势重要联系之一，因为 $g(x,y)$ 正是牛顿位势的核（$n\geqslant 3$ 时）.

定理 1.[1)]

---

1) 理解 $\frac{a}{0}=\infty$，$(a>0)$.

$$g(x,y)\equiv\int_0^{\infty}p(t,x,y)dt=\begin{cases}c_n/|x-y|^{n-2}, & (n\geqslant 3);\\ \infty, & (n\leqslant 2),\end{cases}\tag{8}$$

其中 c_n 为常数：

$$c_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{n/2}}$$

$$=\begin{cases}1/2\pi, & n=3\text{ 时},\\ 1/2\pi^2, & n=4\text{ 时},\\ 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)/(2\pi)^k, & n=2k+1>3\text{ 时},\\ 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-2)/2\pi^k, & n=2k>4\text{ 时}.\end{cases}\tag{9}$$

证. 对 $s>0$ 有

$$\int_0^s p(t,x)dt=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^s\frac{1}{t^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)dt$$

$$=\frac{|x|^{2-n}}{2\pi^{n/2}}\int_{\frac{|x|^2}{2s}}^{\infty}u^{(n/2)-2}e^{-u}du,\quad\left(u=\frac{|x|^2}{2t}\right).\tag{10}$$

注意当且只当 $a>0$ 时，$\int_0^{\infty}u^{a-1}e^{-u}du$ 收敛。在上式中令 $s\to\infty$，即得

$$\int_0^{\infty}p(t,x)dt=\begin{cases}c_n/|x|^{n-2}, & (n\geqslant 3);\\ \infty, & (n\leqslant 2),\end{cases}\tag{11}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi^{n/2}}\int_0^{\infty}u^{(n/2)-2}e^{-u}du=\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Big/2\pi^{n/2}.\tag{12}$$

以 $y-x$ 代入(11)中的 x 即得(8)$_\#$

比较 § 1(15)，可见

$$c_n=2/(n-2)|S_1|.\tag{13}$$

设 $f(x)$ 为定义在 R^n 上的函数．令

$$
\left.\begin{aligned}
&B=(f:\ 有界,\ \mathscr{B}^n\ 可测);\\
&C=(f:\ f\in B,\ f\ 连续);\\
&C_0=(f:\ f\in C\ 而且\ f(\infty)=\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0).
\end{aligned}\right\}\tag{14}
$$

又令 $\|f\|=\sup\limits_{x}|f(x)|$．对 $f\in B$，定义变换 T_t

$$
T_tf(x)=\int_{R^n}f(y)p(t,x,y)dy,\ (t>0).\tag{15}
$$

显然

$$
\|T_tf\|\leqslant\|f\|,\quad \|T_t\|\leqslant 1.\tag{16}
$$

引理 2. (i) $T_tB\subset C$; (ii) $T_tC_0\subset C_0$.

证．对 $f\in B$ 有

$$
|T_tf(x)-T_tf(x_0)|\leqslant\|f\|\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\int_{R^n}|e^{-|x-y|^2/2t}
$$

$$
-e^{-|x_0-y|^2/2t}|dy.
$$

由勒贝格定理，当 $x\to x_0$ 时，右方趋于 0．此得证 (i)．

对 $f\in C_0$ 及 $N>0$，有

$$
|T_tf(x)|\leqslant\int_{|y|>N}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)|f(y)|dy
$$

$$
+\|f\|\int_{|y|<N}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)dy.
$$

由于 $f(\infty)=0$，对 $\varepsilon>0$，当 N 充分大时，右方第一积分小于 $\varepsilon/2$；固定此 N，当 $|x|$ 充分大时，第二积分 $<\varepsilon/2$，此得证 $T_tf(\infty)=0$．联合(i)即得证 (ii)#

引理 3. 设 f 均匀连续，则

$$
\lim_{t\to 0}\|T_tf-f\|=0.\tag{17}
$$

证．对 $\varepsilon>0$，由假设，可选 $\delta>0$，使对一切 y，有

$$\sup_{x:|x|<\delta}|f(x+y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\|T_tf-f\|\leqslant\sup_y\left(\int_{|x|<\delta/2}+\int_{|x|\geqslant\delta/2}\right)\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)|f(x+y)-f(y)|dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|\int_{|x|\geqslant\delta/2}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/2t}dx$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|\int_{|z|\geqslant\delta/2\sqrt{t}}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-|z|^2/2}dz.$$

当 t 充分小时，第二积分小于 $\varepsilon/2$。#

注 1. 如 $f\in C_0$，则 f 均匀连续，故(17)对 $f\in C_0$ 成立。

由(17)的启发，补定义 $T_0f=f$，$T_0=I$（恒等算子）。

上引理讨论了 $t\to 0$ 的情况；至于 $t\to\infty$，则有

引理 4. 如 $f\in C_0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\|T_tf\|=0$.

证. 对 $\varepsilon>0$，存在 $r>0$，使 $x\bar{\in} B_r=(x:|x|\leqslant r)$ 时，$|f(x)|<\varepsilon/2$. 于是

$$\|T_tf\|<\frac{\varepsilon}{2}+\sup_y\int_{B_r}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)f(x)dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\sup_y\|f\|\int_{t^{-1/2}(B_r-y)}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)dz$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\|f\|\int_{t^{-1/2}B_r}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)dz,\quad(18)$$

其中

$$a(B_r-y)=(a(x-y):x\in B_r).$$

因而 B_r-y 是以 $-y$ 为中心、r 为半径的球. 当 t 充分大

时，(18)中最后一项 $< \varepsilon/2$ #

为讨论对一般 t 的连续性，先证 T_t 的半群性.

引理 5. $T_{s+t} = T_s T_t$ $(s \geqslant 0, t \geqslant 0, T_0 = I)$.

证.

$$T_s T_t f(z) = (2\pi s)^{-n/2}(2\pi t)^{-n/2}\iint e^{-|y-z|^2/2s} e^{-|x-y|^2/2t} f(x)\,dx\,dy$$

$$= (2\pi s)^{-n/2}(2\pi t)^{-n/2}\iint \exp\left[-\frac{|y-(zt+xs)/(s+t)|^2}{2st/(s+t)}\right]$$

$$\cdot \exp\left[\frac{-|x-z|^2}{2(s+t)}\right] f(x)\,dy\,dx,$$

其中每次积分都在 R^n 上进行. 利用

$$[2\pi st/(s+t)]^{-n/2}\int \exp\left[-\frac{|y-(zt+xs)/(s+t)|^2}{2st/(s+t)}\right] dy$$

$$= 1$$

得知上式右端等于

$$[2\pi(s+t)]^{-n/2}\int \exp\left[-\frac{|x-z|^2}{2(s+t)}\right] f(x)\,dx = T_{s+t}f(z) \#$$

由(16)及引理 5 知 $\{T_t, t \geqslant 0\}$ 构成作用于 B 上的线性算子压缩半群，(16)表压缩性.

引理 6. 如 f 均匀连续，或 $f \in C_0$，则 $T_t f(x)$ 对 $t \geqslant 0$ 均匀连续，而且此连续性对 $x \in R^n$ 也是均匀的.

证. 利用 T_t 的半群性、压缩性、引理 3 及注 1，对 $h > 0$，有

$$\|T_{t+h}f - T_t f\| \leqslant \|T_t\| \cdot \|T_h f - f\| \leqslant \|T_h f - f\| \to 0,$$
$$(h \to 0);$$

对 $h = -k < 0$，有

$$\|T_{t+h}f - T_t f\| \leqslant \|T_{t-k}\| \cdot \|T_k f - f\| \leqslant \|T_k f - f\| \to 0,$$
$$(h \to 0) \#$$

按范$\|\cdot\|$的收敛称为强收敛，记为 slim. 令

$$D_A=\left\{f:f\in B，存在\ \operatorname*{slim}_{h\to 0+}\frac{T_hf-f}{h}=g\in B\right\}. \tag{19}$$

简记

$$\operatorname*{slim}_{h\to 0+}\frac{T_hf-f}{h}=g\ 为\ Af=g.$$

称A为半群 $\{T_t,t\geqslant 0\}$ 或过程X的强无穷小算子，称D_A为A的定义域.

下定理把布朗运动与拉普拉斯方程联系起来.

定理 2. 设 f 有界、二次连续可微，又二阶偏导数有界且在 R^n 上均匀连续，则 $f\in D_A$，又

$$Af(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}\left(\equiv\frac{1}{2}\Delta f(x)\right), \tag{20}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

证.

$$\begin{aligned}T_tf(x)&=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\int\exp\left[-\frac{|y-x|^2}{2t}\right]f(y)dy\\&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{-z^2/2}f(x+z\sqrt{t})dz,\end{aligned} \tag{21}$$

其中$\int=\int_{R^n}$. 令 $f_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，$f_{ij}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$，利用泰勒展式，得

$$\begin{aligned}f(x+z\sqrt{t})&=f(x)+\sqrt{t}\sum_{i=1}^{n}z_if_i(x)\\&\quad+\frac{t}{2}\sum_{i,j=1}^{n}z_iz_jf_{ij}(x)+\frac{t}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[f_{ij}(\tilde{x})\\&\quad-f_{ij}(x)]z_iz_j.\end{aligned}$$

$\tilde{x}$ 之坐标分别在 x 与 $x+z\sqrt{t}$ 的坐标之间。以此代入(21)，得

$$T_t f(x) = f(x) + \frac{t}{2}\Delta f(x)$$

$$+ (2\pi)^{-n/2}\frac{t}{2}J(t, x), \qquad (22)$$

其中

$$J(t, x) = \int e^{-z^2/2}\sum_{i,j=1}^{n}[f_{ij}(\tilde{x}) - f_{ij}(x)]z_i z_j dz.$$

令

$$F(x, z, t) = \max_{i,j}|f_{ij}(\tilde{x}) - f_{ij}(x)|$$

则对任意 $s>0$，有

$$|J(t, x)| \leqslant \int e^{-z^2/2}\sum_{i,j=1}^{n}F(x, z, t)\frac{z_i^2+z_j^2}{2}dz$$

$$= n\int F(x, z, t)e^{-z^2/2}z^2 dz$$

$$\leqslant n\int_{|z|<s} F(x, z, t)z^2 e^{-z^2/2}dz$$

$$+ 2\max_{i,j}\|f_{ij}\|n\int_{|z|\geqslant s} z^2 e^{-z^2/2}dz.$$

由于 f_{ij} 的均匀连续性，当 $t\downarrow 0$时，第一项对 x 均匀地趋于 0。故

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\sup_x |J(t, x)| \leqslant 2\max_{i,j}\|f_{ij}\|n\int_{|z|\geqslant s} z^2 e^{-z^2/2}dz.$$

由 § 1 引理 1，当 $s\to\infty$ 时，右方趋于 0，故

$$\lim_{t\to 0}\sup_x |J(t, x)| = 0.$$

由此及(22)得

$$\lim_{t\to 0+}\left\|\frac{T_t f - f}{t} - \frac{1}{2}\Delta f\right\| = 0_\#$$

注 2. 如 f 有界、二次连续可微，则在任一紧集 $K(\subset R^n)$ 上，均匀地有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{2}\Delta f(x). \tag{23}$$

实际上，只要在上述证明中，改 $\sup\limits_{x}$ 为 $\sup\limits_{x\in K}$，改"均匀"为在"K 上均匀"，改 $\|f\|$ 为 $\sup\limits_{x\in K}|f(x)|$.

(三) 作为马氏过程的布朗运动. 考虑 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的布朗运动 $\{x_t(\omega), t\geqslant 0\}$. 不妨设 $x_0(\omega)\equiv 0$，因而 $P(x_0(\omega)=0)=1$ (否则考虑 $\{x_t(\omega)-x_0(\omega), t\geqslant 0\}$，它显然也是一布朗运动). 自然地称它为自 0 出发的布朗运动. 令 $\mathscr{N}_t^s$ 为 $\{x_u(\omega), s\leqslant u\leqslant t\}$ 所产生的 σ 代数，记 $\mathscr{N}_t = \mathscr{N}_t^0$, $\mathscr{N}^t = \mathscr{N}_\infty^t = \bigcup\limits_{s>t}\mathscr{N}_s^t$, $\mathscr{N} = \mathscr{N}_\infty^0$.

今对每 $a\in R^n$，定义 $x_t^a(\omega) = x_t(\omega) + a$. 由平移不变性，知 $X^a = \{x_t^a(\omega), t\geqslant 0\}$ 也是布朗运动. 自然地称它为自 a 出发的布朗运动. 注意由 $\{x_u^a(\omega), s\leqslant u\leqslant t\}$ 产生的 σ 代数也是 $\mathscr{N}_t^s$. 以 P_a 表 X^a 在 $\mathscr{N}$ 上产生的概率测度，它是满足下列条件的唯一测度：对任意 $0\leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $A_i\in\mathscr{B}^n$,

$$\begin{aligned}
&P_a(x^a(t_1)\in A_1, \cdots, x^a(t_m)\in A_m)\\
&\quad = P(x(t_1)+a\in A_1, \cdots, x(t_m)+a\in A_m)\\
&\quad = \int_{A_1} p(t_1, a, da_1)\int_{A_2} p(t_2-t_1, a_1, da_2)\\
&\qquad \cdots\int_{A_m} p(t_m-t_{m-1}, a_{m-1}, da_m),
\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $p(t, x, y)$ 由(6)定义. 在 $\mathscr{N}$ 上，P 重合于 P_0.

全体 $X^a(a\in R^n)$ 构成一马氏过程 $X=(x_t,\mathscr{N}_t,P_x)$，这里的 x_t 应理解为全体 $x_t^a(a\in R^n)$，它的转移密度为(6)中的 $p(t,x,y)$. 此马氏过程是由各点出发的布朗运动所共同组成，因而可以利用马氏过程的理论. 以后所说的布朗运动，无特别声明时，均指此马氏过程. X 有下列性质：

1）由引理 2 (i) 及轨道 x_t 对 t 的连续性，知 X 是强马氏过程(文献[8]中定理 3.10).

2）由引理 2 及文献[8]中定理 3.3，过程 $X'=(x_t,\mathscr{N}_{t+},P_x)$ 也是强马氏过程；这里 $\mathscr{N}_{t+}=\bigcap\limits_{u>t}\mathscr{N}_u$. 又由 [8] 引理 3.3，关于过程 X'，τ 为马氏时间的充要条件是：$\forall t\geqslant 0$，

$$(\tau<t)\in\mathscr{N}_t.$$

3）以 $\bar{\mathscr{N}}_t$ 表 $\mathscr{N}_t$ 关于一切 $P_x(x\in R^n)$ 的完全化 σ 代数，$\bar{P}_x$ 表 P_x 在 $\bar{\mathscr{N}}$ 上之延拓，则 $(x_t,\bar{\mathscr{N}}_{t+},\bar{P}_x)$ 也是强马氏过程(文献[8]中定理 3.12).

§3. 首中时与首中点

(一) 首中时. 近代马氏过程论中的一个极重要的概念是首中某集 B 的时间. 对 n 维布朗运动 X 及集 $B\in\mathscr{B}^n$，定义

$$h_B(\omega)=\begin{cases}\inf(t>0,\ x_t(\omega)\in B), & \text{如右集非空;}\\ \infty, & \text{反之.}\end{cases}\tag{1}$$

称 $h_B(=h_B(\omega))$ 为 B 的首中时 (hitting time)，亦称为 $B^c(=R^n-B)$ 的首出时.

h_B 是马氏时间. 当 B 为开集时，此结论极易证明：实际上，由轨道的连续性，对 $t>0$，

$$(h_B<t)=\bigcup_{\text{有理 } r<t}(x_r\in B)\in\mathscr{N}_t.$$

但对一般的 $B \in \mathscr{B}^n$，则证明很困难而需用到 Choquet 的容度论(见文献[1]或[23]中附录)。

在 $(h_B < \infty)$ 上考虑 $x(h_B)(=x(h_B, \omega))$，它是随机变量，取值于 R^n. 称它为集 B 的首中点. 显然，如 B 是紧集，则 $x(h_B) \in B$. 对一般的 B，只有 $x(h_B) \in \bar{B}$ (B 的闭包).

引理 1 (0-1 律). 设 $A \in \mathscr{N}_{0+}$，则

$$P_a(A) = 0 \text{ 或 } 1.$$

证. 以 θ_t 表 X 的推移算子(见文献[8])，因 $\theta_0 A = A$，故由马氏性得

$$P_a(A) = P_a(A\theta_0 A) = \int_A P_a(\theta_0 A | \mathscr{N}_{0+}) P_a(d\omega)$$

$$= \int_A P_{x(0)}(A) P_a(d\omega) = [P_a(A)]^2 \#$$

既然 $(h_B = 0) \in \overline{\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{N}_\varepsilon} = \mathscr{N}_{0+}$，故由引理 1

$$P_a(h_B = 0) = 0 \text{ 或 } 1.$$

在后一情况，称 a 为 B 的规则点；否则称为非规则点. 直观地说，从 a 出发，作布朗运动的粒子能立刻击中 B 的点是 B 的规则点；因此，容易想象，B 在规则点附近不能太稀疏. 以 $\mathring{B}$ 表 B 的内点所成的集. 由 X 的轨道的连续性，如 $a \in \mathring{B}$，则 a 是 B 的规则点；如 $a \in (\bar{B})^c$ (c 表补集运算)，则自 a 出发，必须在开集 $(\bar{B})^c$ 中停留一段时间而不能立即击中 B，故 a 是 B 的非规则点. 以 B^r 表 B 的规则点的集，由上述得

$$\mathring{B} \subset B^r \subset \bar{B}. \tag{2}$$

剩下只是边界 $\partial B(=\bar{B} \cap \bar{B^c})$ 上的点，可以是规则点，也可能非规则.

如 B 有内点，由(2)知 B^r 非空. 可见对一般的集，规则点应很多而非规则点则较少. 的确，以后会证明(§3，定理 4)，

B 中非规则点集 $B\cap(B^r)^c$ 的 L 测度为 0.

一个极端情况是 $B^r=\varnothing$（空集），因之 B 必无内点而呈稀疏态. 称 B 为疏集，如存在 $D\in\mathscr{B}^n$，$B\subset D$，$D^r=\varnothing$. 由此定义

$$P_a(h_B=0)\leqslant P_a(h_D=0)=0,$$

故自任一点 a 出发都不能立即击中疏集 B.

更极端的情况是自任一点出发都永不能击中的集. 称 B 为极集，如 $P_a(h_B<\infty)=0$.

显然，极集是疏集. 以后将证明：紧集是极集的充要条件是它为疏集(§ 11，定理 2)；B 为极集的充要条件是它的容度 $\tilde{C}(B)=0$ (§ 11，定理 4).

（二）首次通过公式. 此公式很重要. 设 τ 为马氏时间，对 τ 用强马氏性，得

$$P_a(x_t\in A)=P_a(x_t\in A,\ \tau>t)+\int_0^t\int P_b(x_{t-s}\in A)P_a(\tau\in ds,\ x_\tau\in db). \tag{3}$$

因而对可积函数 $f(x)$，有

$$E_af(x_t)=E_a(f(x_t),\ \tau>t)+\int_0^t\int E_bf(x_{t-s})P_a(\tau\in ds,\ x_\tau\in db), \tag{4}$$

其中 $\int=\int_{R^n}$，E_a 表对应于 P_a 的数学期望.

特别，如取 $\tau=h_B$，则因 $x(h_B)\in\overline{B}$，故此时(4)中的积分 $\int_{R^n}$ 可换为 $\int_{\overline{B}}$.

（三）球面的首中时. 对一般的 B，求出 h_B 的分布是相当困难的问题，对首中点 $x(h_B)$ 也如此. 只是对少数的 B，问题可以解决，例如球面 $S_r=(x:|x|=r)$，$r>0$. 简记 S_r 的首中时为 h_r.

定理 1. i) $P_a(h_r<\infty)=1$，$(|a|\leqslant r)$；

ii) $E_0h_r=r^2/n$；

iii) E_ah_r 当 $|a|\leqslant r$ 时有界.

证. 由(4)

$$E_0f(x_t)=E_0(f(x_t),\ h_r>t)$$
$$+\int_0^t\int_{S_r}E_bf(x_{t-s})P_0(h_r\in ds,\ x(h_r)\in db).\qquad(5)$$

特别,取 $f(x)=|x|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$. 由于 $x(u)$ 的每个分量 $x_i(u)$ 在开始分布 P_{b_i} 下有 $\mathcal{N}(b_i,\sqrt{u})$一维正态分布,故

$$E_{b_i}[x_i(u)]^2=b_i^2+u,$$

从而

$$E_bf(x_u)=\sum_{i=1}^n E_{b_i}[x_i(u)]^2=|b|^2+nu.\qquad(6)$$

以(6)代入(5)得

$$nt=E_0(|x_t|^2,h_r>t)+\int_0^t\int_{S_r}[|b|^2$$
$$+n(t-s)]P_0(h_r\in ds,x(h_r)\in db).$$

当 $b\in S_r$ 时，$|b|=r$ 是一常数,故

$$nt=E_0(|x_t|^2,h_r>t)+r^2P_0(h_r\leqslant t)$$
$$+nE_0(t-h_r,\ h_r\leqslant t),$$

亦即

$$ntP_0(h_r>t)+nE_0(h_r,h_r\leqslant t)$$
$$=E_0(|x_t|^2,\ h_r>t)+r^2P_0(h_r\leqslant t).\qquad(7)$$

当 $h_r>t$ 时，$|x_t|^2<r^2$，故

$$ntP_0(h_r>t)+nE_0(h_r,\ h_r\leqslant t)\leqslant 2r^2.\qquad(8)$$

令 $t\to\infty$，可见 $P_0(h_r>t)\to 0$，或

$$P_0(h_r < \infty) = 1. \tag{9}$$

同理,当 $t \to \infty$ 时,得 $E_0 h_r < \infty$. 由于

$$E_0 h_r = \int_0^t s dF(s) + \int_t^\infty s dF(s)$$
$$\geqslant \int_0^t s dF(s) + t P_0(h_r > t),$$

其中 $F(s) = P_0(h_r \leqslant s)$, 从而 $t P_0(h_r > t) \to 0$, $(t \to \infty)$. 由此及 (9), 于(7)中令 $t \to \infty$, 即得 $n E_0 (h_r) = r^2$, 此即 ii).

今考虑一般的 a, $|a| \leqslant r$. 以 $S_u(a)$ 表以 a 为中心、u 为半径的球面. 选 u 充分大,使一切 $S_u(a)(|a| < r)$都包含 S_r. 以 $h_u(a)$ 表 $S_u(a)$ 的首中时, $h_u = h_u(0)$, 则

$$P_a(h_r < h_u(a)) = 1.$$

由布朗运动的平移不变性,

$$P_a(h_r < \infty) \geqslant P_a(h_u(a) < \infty) = P_0(h_u < \infty) = 1.$$

最后,

$$E_a h_r \leqslant E_a[h_u(a)] = E_0 h_u = \frac{u^2}{n}. \#$$

以 e_B 表 B 的首出时,即 $e_B = h_{B^c}$.

系 1. 设 $B \in \mathscr{B}^n$ 有界,则 $E_x(e_B)$ 对 $x \in B$ 有界.

证. 只要取充分大的球包含 B,并仿上证即可. #

注 1. 如 B 无界,则问题复杂. 例如,设 $n = 2$, $B_\alpha = (x: x \in R^2, x \neq 0, 0 < \theta < \alpha)$, θ 是 x 与向量$(1, 0)$的交角. 可以证明: $E_a(e_{B_\alpha}) < \infty$, (一切 $a \in B_\alpha$), 等价于$\alpha < \frac{\pi}{4}$. 对一般的连通开集 B, 则可证明: $E_a(e_B^{p/2}) < \infty$ 对某 $a \in B$,因之对一切 $a \in B$ 成立, 等价于存在调和于B中的函数 u, 使 $|x|^p \leqslant u(x)$, $x \in B$. 见文献[2;2₁].

注 2. 至于 h_r 的分布，在文献[4]中证明了：

$$P_0(h_r > a) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ni} \exp\left(-\frac{q_{ni}^2}{2r^2} a\right), \quad (a \geqslant 0), \tag{10}$$

其中 q_{ni} 是 Bessel 函数 $J_\nu(z)$ $\left(\nu = \frac{n}{2} - 1\right)$ 的正零点，又

$$\xi_{ni} = q_{ni}^{\nu-1}/2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)J_{\nu+1}(q_{ni}). \tag{11}$$

那里还发现了一个有趣的事实：以 $T_r^{(n+2)}$ 表 $n+2$ 维布朗运动在 $n+2$ 维球 $B_r = \left(x: \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 \leqslant r^2\right)$ 内的停留时间，以 $h_r^{(n)}$ 表 n 维布朗运动首中球面 $S_r = \left(x: \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2\right)$ 的时间，则关于 P_0，$T_r^{(n+2)}$ 与 $h_r^{(n)}$ 同分布，故 $P_0(T_r^{(n+2)} > a)$ 也等于(10)之右方值。这些结果为[10]所发展，例如，求出了 h_r 的拉氏变换：

$$E_b e^{-\lambda h_r} = \left(\frac{r}{|b|}\right)^\nu I_\nu(\sqrt{2\lambda}|b|)/I_\nu(\sqrt{2\lambda}r),$$
$$(n \geqslant 2), \tag{12}$$

其中 I_ν 为 modified Bessel 函数，$\nu = \frac{n}{2} - 1$，$0 < |b| < r$；

而

$$E_0 e^{-\lambda h_r} = (r\sqrt{2\lambda})^\nu/[2^\nu I_\nu(r\sqrt{2\lambda})\Gamma(\nu+1)],$$
$$(n \geqslant 2). \tag{13}$$

在上二式中，$\lambda > 0$.

（四）球面的首中点. 今讨论首中点 $x(h_r)$ 的分布. 由定理 1 i)，$P_a(x(h_r) \in S_r) = 1$，$|a| \leqslant r$. 下面证明：关于 P_0，$x(h_r)$ 有球面上的均匀分布 U_r，U_r 由 §1(16)定义.

设 H 为 R^n 上正交变换，它把点 x 变为点 Hx，把集 A 变为集 $HA = (Hx: x \in A)$，$\mathscr{B}^n$ 上的测度 U 称为关于 H 不变，

如 $U(A)=U(HA)$, $A\in\mathscr{B}^n$.

引理 2. 设 U 为 S_r 上之概率测度，它对任一保留原点不动的正交变换(或旋转) H 不变，则 $U=U_r$.

证. 1° 设 φ 为 U 之特征函数，ξ 是以 U 为分布之随机向量，即 $P(\xi\in A)=U(A)$. 由

$$P(H^{-1}\xi\in A)=P(\xi\in HA)=U(HA)=U(A)$$

知 $H^{-1}\xi$ 与 ξ 同分布. 于是

$$\varphi(x)=Ee^{i(x,\xi)}=Ee^{i(x,H^{-1}\xi)}=Ee^{i(Hx,\xi)}=\varphi(Hx),$$

即 $\varphi(x)$ 在上述变换下也不变，故必为 $|x|$ 的函数；从而存在一元函数 $\phi(s)$，使

$$\varphi(x)=\phi(|x|),\quad(x\in R^n). \tag{14}$$

2° 显见 U_r 对上述变换不变，故由上知：对 U_1 的特征函数 φ_1，存在一元函数 ϕ_1，使

$$\varphi_1(x)=\phi_1(|x|),\quad(x\in R^n). \tag{15}$$

而 U_r 的特征函数 $\varphi_r(x)$ 满足

$$\begin{aligned}\varphi_r(x)&=\int_{S_r}e^{i(x,y)}U_r(dy)=\int_{S_1}e^{i(rx,y)}U_1(dy)\\&=\phi_1(r|x|),\quad(x\in R^n).\end{aligned} \tag{16}$$

3° 对任 $s>0$，有

$$\begin{aligned}\phi(s)&\overset{(14)}{=}\int_{S_s}\varphi(x)U_s(dx)=\int_{S_s}U_s(dx)\int_{S_r}e^{i(x,y)}U(dy)\\&=\int_{S_r}U(dy)\left(\int_{S_s}e^{i(x,y)}U_s(dx)\right)=\int_{S_r}\varphi_s(y)U(dy)\\&\overset{(16)}{=}\int_{S_r}\phi_1(s|y|)U(dy)=\phi_1(sr).\end{aligned} \tag{17}$$

因之

$$\varphi(x)=\phi(|x|)\overset{(17)}{=}\phi_1(r|x|)\overset{(16)}{=}\varphi_r(x),\quad(x\in R^n)_{\#}$$

定理 2. 对可测集 $A\subset S_r$，有

$$P_0(x(h_r)\in A)=U_r(A). \tag{18}$$

证. 以H表引理 2 中的变换，由§2 引理 1，HX 也是布朗运动. 以h_r'表HX对S_r的首中时，则因正交变换保持距离不变，故$h_r=h_r'$. 于是

$$\begin{aligned}P_0(x(h_r)\in A)&=P_0(Hx(h_r')\in A)\\&=P_0(Hx(h_r)\in A)=P_0(x(h_r)\in H^{-1}A).\end{aligned}$$

这说明$x(h_r)$的分布关于H^{-1}不变. 但H^{-1}可以是上述任一正交变换，故由引理 2 即得证(18)$_\#$

注 3. §5 会证明，如从球内任一点x出发，则

$$P_x(x(h_r)\in A)=\int_A r^{n-2}\left||x|^2-r^2\right||y-x|^{-n}U_r(dy),$$
$$(|x|<r). \tag{19}$$

特别，当$x=0$，此式化为(18).

注 4. 能具体求出首中点分布的，尚有:

1° 超平面$\Pi=(x:(a,x)=c)$，其中向量$a\neq 0$，c为常数. 以μ表Π上的面积测度，则

$$P_x(x(h_\Pi)\in dy)=\frac{\Gamma(n/2)d(x,\Pi)}{\pi^{n/2}|y-x|^n}\mu(dy),\quad(n\geqslant 2),$$

其中$d(x,\Pi)$为x到Π的距离.

2° 当$n=2$时，自$(x,0)$出发，$(x\neq 0)$，Y坐标轴的首中点有柯西分布密度为$|x|/\pi(x^2+y^2)$，$(y\in R^1)$.

（五）一般性质. 称函数f在点x下连续，如$\varliminf\limits_{y\to x}f(y)\geqslant f(x)$.

定理 3. 设$B\in\mathscr{B}^n$，则$P_x(h_B\leqslant t)$对固定的x是$t>0$的连续函数;对固定的$t>0$是x的下连续函数.

证. 设对某$t>0$有$P_x(h_B=t)>0$，则对任意a，$0<a<t$，有

$$\int p(d, x, y)P_y(h_B = t - d)dy \geqslant P_x(h_B = t) > 0. \tag{20}$$

于是存在 $r > 0$ 使

$$\int_{|y| \leqslant r} p(d, x, y)P_y(h_B = t - d)dy$$

$$\geqslant \frac{1}{2} P_x(h_B = t) > 0. \tag{21}$$

由此知对任意 d, $0 < d < t$, 有

$$\int_{|y| \leqslant r} P_y(h_B = t - d)dy > 0. \tag{22}$$

否则 $P_y(h_B = t - d) = 0$ ($L - a.e.\ y$) 而 (21) 左方应为 0.

考虑非降函数 $F(t)$

$$F(t) = \int_{|y| \leqslant r} P_y(h_B \leqslant t)dy.$$

因 $F(\infty) \leqslant \int_{|y| \leqslant r} dy < \infty$, 故 $F(t)$ 至多只有可列多个不连续点;但(22)却表示其不连续点非可列,此矛盾证实了定理的前一结论.

固定 $t > 0$, 注意

$$\int p(d, x, y)P_y(h_B < t - d)dy$$

$$= P_x(\text{对某 } s \in (d, t), x_s \in B).$$

由§2引理2(i),左方、因而右方对 x 连续;但 $d \downarrow 0$ 时,右方 $\uparrow P_x(h_B < t) = P_x(h_B \leqslant t)$, 故后者对 x 下连续#

定理4. 设 $B \in \mathscr{B}^n$, 则 B^r 是 G_δ 型集, 而且 $B \cap (B^r)^c$ 的 L 测度为 0.

证. 由定理3后一结论知, 对固定的 $t > 0$ 及 a, $(x: P_x(h_B \leqslant t) > a)$ 是开集;故由下式立知 B^r 是 G_δ 集:

$$B^r = \{x: P_x(h_B = 0) = 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x: P_x\left(h_B \leqslant \frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left.> 1 - \frac{1}{n}\right).$$

任取相对紧集[1] $A \subset B \cap (B^r)^c$. 先证

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_A P_x(x_t \in A)\,dx = 0. \tag{23}$$

实际上，我们有

$$P_x(x_t \in A) \leqslant P_x(h_A \leqslant t) \leqslant P_x(h_B \leqslant t).$$

当 $x \in A$ 时，$x \in (B^r)^c$，故

$$0 \leqslant \overline{\lim_{t \downarrow 0}} P_x(x_t \in A) \leqslant \lim_{t \downarrow 0} P_x(h_B \leqslant t) = 0.$$

由 Fatou 引理得证(23). 考虑有界连续函数 $f(x)$:

$$f(x) = \int \chi_A(z + x)\chi_A(z)\,dz = \int_A \chi_A(z + x)\,dz,$$

χ_A 为 A 的示性函数.

$$E_0 f(x_t) = E_0 \int_A \chi_A(z + x_t)\,dz = \int_A P_0(x_t + z \in A)\,dz$$

$$= \int_A P_z(x_t \in A)\,dz.$$

由(23),得 A 的测度为

$$|A| = f(0) = \lim_{t \downarrow 0} E_0 f(x_t)$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \int_A P_x(x_t \in A)\,dx = 0.$$ #

注 5. 令 $f_B(x, t) = P_x(h_B \leqslant t)$, 紧集 $B \subset R^3$. 可以证明: $f_B(x, t)$ 是热传导方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta f \quad (t > 0,\ x \in B^c)$$

1) 称集 $A \in \mathscr{B}^n$ 为相对紧集,如 $\bar{A}$ 紧.

在下列条件下的唯一解：

开始条件　$f(x, 0) = 0$,　　$(x \in B^c)$,

边值条件　$\lim\limits_{x \to y} f(x, t) = 1$,　$(t > 0, y \in B \cap B^r)$.

因此，可视 $f_B(x, t)$ 为于时 t 在点 $x \in B^c$ 上的温度．在时 t 自 B 流入周围介质 B^c 中的总能量为

$$E_B(t) = \int_{B^c} P_x(h_B \leqslant t)\, dx = \int_{B^c} f_B(x, t)\, dx.$$

可以证明[19]：当 $n = 3$, $t \to \infty$ 时

$$E_B(t) = tC(B) + 4(2\pi)^{-1/2}[C(B)]^2 t^{1/2} + 0(t^{1/2});$$

而且若 B 为球，则 $0(t^{1/2}) = 0$, $(t > 0)$．这里 $C(B)$ 是 B 的容度(见 § 9).

§ 4. 调 和 函 数

(一) 定义．设 $A \subset R^n$ 为任一开集．称函数 $h(x)$ 在 A 中调和，如它在 A 中连续，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 存在，而且满足拉普拉斯方程

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = 0. \tag{1}$$

例 1．设 a 为任一定点，c_1 与 c_2 为二常数．令

$$h(x) = c_1 + c_2/|x - a|^{n-2}, \quad (n \neq 2), \tag{2}$$

$$h(x) = c_1 + c_2 \log \frac{1}{|x - a|}, \quad (n = 2). \tag{3}$$

由直接计算知，它们在 $R^n - \{a\}$ 中调和．事实上，$h(x)$ 除在 a 点外连续．设 $a = (a_1, \cdots, a_n)$，则

$$|x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}.$$

若 $n > 2$，则

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = c_2 \frac{(2-n)(x_i - a_i)}{|x-a|^n},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = c_2 \left\{ \frac{n(n-2)(x_i - a_i)^2}{|x-a|^{n+2}} - \frac{n-2}{|x-a|^n} \right\}.$$

由此知 h 满足(1). 对 $n = 1, 2$, 证明类似.

注意,调和函数定义中的连续性必不可少.

下列 Дынкин 定理,很是有用. 证明见文献[8]第5章§1(或文献[22]§5.1定理1)及本文§2定理2.

定理1. 设 A 为相对紧开集. 如函数 u 在 $\overline{A}$ 连续, Δu 在 A 中存在、连续而且有界,则对一切 $x \in \overline{A}$ 有

$$E_x[u(x_e)] - u(x) = \frac{1}{2} E_x\left[\int_0^e \Delta u(x_s) ds\right], \tag{4}$$

其中 $e = e_A$ 为 A 的首出时.

由(4)知,如 u 在 $\overline{A}$ 连续且在 A 内调和,则

$$u(x) = E_x[u(x_e)], \quad (x \in \overline{A}). \tag{5}$$

下面讨论调和性的等价条件.

称函数 $f(x)$ 在开集 A 中为局部可积的,如它在 A 中每一紧集上为 L 可积. 称 $u(x)$ 在 A 中具有球面平均性,如对每点 $a \in A$ 和每个球 $B_r(a) = (x: |x-a| \leqslant r) \subset A$, $(r > 0)$, 有

$$u(a) = \int_{S_r(a)} u(x) U_r(dx), \tag{6}$$

U_r 为球面 $S_r(a)$ 上的均匀分布. 由§3定理2,可改写(6)为

$$u(a) = E_a[u(x_{e_r})]. \tag{7}$$

e_r 为 $S_r(a)$ 的首中时, 也是开球 $\mathring{B}_r(a) = (x: |x-a| < r)$ 的首出时. 这是球面平均性的概率表示.

定理2. 函数 $h(x)$ 在开集 A 中调和的充要条件是它在 A 中局部可积而且有球面平均性.

证. 设 $h(x)$ 调和. 由连续性得局部可积性. 任取 $a\in A$, $\mathring{B}_r(a)\subset A$, 在(5)中取 u 为 h, e 为 e_r, 即得球面平均性.

反之,设 h 局部可积,而且满足(6). 暂[1]增设 $h\in C^2(A)$, 则必有 $\Delta h=0$. 否则,如说在某点 $a\in A$,有 $\Delta h(a)>0$(<0 时讨论类似);由于 $h\in C^2(A)$, 必存在 $B_r(a)\subset A$, 使

$$P_a(\Delta h(x_s)>0,\ s\leqslant e_r)=1.$$

由(4)

$$E_a[h(x_{e_r})]-h(a)=\frac{1}{2}E_a\left[\int_0^{e_r}\Delta h(x_s)ds\right]>0,$$

这与 h 满足(6)矛盾.

现在证明: $h\in C^2(A)$ 的增设是多余的. 甚至可以证明更强的结果: 如 h 在 A 中局部可积而且有球面平均性, 则 $h\in C^\infty(A)$.

为证此,首先注意: 如 $g(x)$ $(x\in R^n)$ 为 L 可积,则有等式(见 § 1,系 1)

$$\int g(x)dx=|S_1|\int_0^\infty\left(\int_{S_r}g(x)U_r(dx)\right)r^{n-1}dr,\qquad(8)$$

其中 $|S_1|$ 为单位球的面积(§ 1, (15)). 任取 $x_0\in A$, 选 $\delta>0$, 使球 $B_{2\delta}(x_0)\subset A$. 以 ϕ 表$[0,\infty)$上的非负、无穷次可微的函数, 它在 $[\delta^2,\infty)$ 上恒为 0, 但在 $[0,\delta^2)$ 上不恒为 0. 则由(8)有

$$\begin{aligned}\int_A\phi(|y-x|^2)h(y)dy&=\int_{B_\delta(0)}\phi(|y|^2)h(x+y)dy\\&=|S_1|\int_0^\delta\left[\int_{S_r}\phi(|y|^2)h(x+y)U_r(dy)\right]r^{n-1}dr\\&=|S_1|\int_0^\delta\phi(r^2)\left[\int_{S_r}h(x+y)U_r(dy)\right]r^{n-1}dr\end{aligned}$$

---

1) 说 $h\in C^m(A)$, 如 h 在 A 中有 $K(\leqslant m)$ 级连续偏导数.

$$= |S_1| \int_0^\delta \phi(r^2) \left(\int_{S_r(x)} h(y) U_r(dy) \right) r^{n-1} dr$$

$$= |S_1| h(x) \int_0^\delta \phi(r^2) r^{n-1} dr.$$

但此式左方作为 x 的函数在 $\mathring{B}_\delta(x_0)$ 中无穷次可微，故右方中的 $h(x)$ 也如此 #

对局部可积函数 $f(x)$，以 $S^r f(a)$ 表它对球面 $S_r(a)$ 关于均匀分布的平均值：

$$S^r f(a) = \int_{S_r(a)} f(x) U_r(dx) = \frac{1}{|S_r(a)|} \int_{S_r(a)} f(x) L_{n-1}(dx). \tag{9}$$

以 $B^r f(a)$ 表它对球体 $B_r(a)$ 关于勒贝格测度 L 的平均值：

$$B^r f(a) = \frac{1}{|B_r(a)|} \int_{B_r(a)} f(x) L(dx). \tag{10}$$

$|B_r(a)|$ 表 $B_r(a)$ 的体积. 我们有

$$B^r f(a) = \frac{1}{|B_r(a)|} \int_0^r \int_{S_u(a)} f(x) L_{n-1}(dx) du$$

$$= \frac{1}{|B_r(a)|} \int_0^r |S_u(a)| S^u f(a) du. \tag{11}$$

今设 h 调和，则 $h(a) = S^u h(a)$. 以 h 代入(11)中的 f，得

$$B^r h(a) = \frac{h(a)}{|B_r(a)|} \int_0^r |S_u(a)| du = h(a). \tag{12}$$

这表示调和函数也有球体平均性.

（二）性质．调和性的约束随所在区域之扩大而加强，极而言之，则有

定理 3. 在 R^n 中调和而且有下界（或上界）的函数 $h(x)$ 是一常数.

证．因调和函数之负仍调和，故只需考虑有下界情况，而

且不妨设下界为0.）任取二点 x, y，令 $a = |x - y|$. 对 $s > 0$，有 $B_s(y) \subset B_{a+s}(x)$，故

$$\int_{B_s(y)} h(z) L(dz) \leqslant \int_{B_{a+s}(x)} h(z) L(dz),$$

亦即

$$|B_s(y)| B^s h(y) \leqslant |B_{a+s}(x)| B^{a+s} h(x).$$

利用(12)得

$$|B_s(y)| h(y) \leqslant |B_{a+s}(x)| h(x).$$

于是由 $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{|B_s(y)|}{|B_{a+s}(x)|} = 1$ 立得 $h(y) \leqslant h(x)$. 由 x 与 y 的对称性即得 $h(x) = h(y)$#

定理 4 （极大[或极小]原理）. 设 h 在有界开集 A 中调和，在 $\overline{A}$ 中连续，则对任意 $a \in A$ 有

$$\inf_{x \in \partial A} h(x) \leqslant h(a) \leqslant \sup_{x \in \partial A} h(x). \tag{13}$$

证. 以 e 表 A 的首出时. 由布朗运动轨道的连续性，x_e 属于 A 的边界 ∂A. 由(4)

$$h(a) = E_a[h(x_e)] = \int_{\partial A} h(x) P_a(x_e \in dx), \quad (a \in \overline{A})$$

由此立得(13)#

调和函数有许多有趣的性质，我们只叙述上述的一些，因为它们以后要用到，而且与概率论关系密切.

（三）布朗运动轨道的性质.

a. 设 $e = e(r, R)$ 为球层 $A = (x: 0 < r < |x| < R)$ 的首出时，则对 $a \in A$ 有

$$P_a(|x_e| = r) = \begin{cases} (R^{2-n} - |a|^{2-n})/(R^{2-n} - r^{2-n}), & (n \neq 2); \\ (\log R - \log |a|)/(\log R - \log r), & (n = 2). \end{cases} \tag{14}$$

实际上，如 $n \neq 2$，取 $h(x) = |x|^{2-n}$. 由例1知它在 A 中调

和．又由§3定理1，$P_a(e<\infty)=1$，$(a\in A)$．从而

$$P_a(|x_e|=R)+P_a(|x_e|=r)=1.$$

以此 h 的表达式代入 $h(a)=E_a[h(x_e)]$，得

$$|a|^{2-n}=R^{2-n}(1-P_a(|x_e|=r))+r^{2-n}P_a(|x_e|=r).$$

由此立得(14)中前一结论．同理，对 $n=2$，取 $h(x)=\log|x|$，可得后一结论．

b. 令 e_r 为球面 $S_r(0)=(x:|x|=r)$ 的首中时，则对 $|a|>r$，有

$$P_a(e_r<\infty)=\begin{cases}(r/|a|)^{n-2}, & n\geqslant 3,\\ 1, & n\leqslant 2.\end{cases} \tag{15}$$

实际上，$e_r=\lim\limits_{R\to\infty}e(r,R)$，故

$$P_a(e_r<\infty)=\lim_{R\to\infty}P_a(|x_e|=r).$$

由此及(14)即得(15)．

c. 一、二维布朗运动具有常返性：设 a，b 为任二点，h_b 为 b 的邻域 V_b 的首中时，则

$$P_a(h_b<\infty)=1 \tag{16}$$

实际上，由(15)第二式知此结论对 $b=0$ 成立．由类似的证明知它对任意 b 也成立．对一维布朗运动，(16)还可加强，即其中的 h_b 可理解为单点集 $\{b\}$ 的首中时．实际上，设 $a<b$，任取 $c>b$．则由(16)，自 a 出发，首中 c 的任一不含 b 的邻域的概率为1；由轨道的连续性及 $a<b<c$，中间经过 b 之概率也为1．

d. 二维布朗运动轨道处处稠密．令

$$D_t=(\omega:\{x_s(\omega),s\geqslant t\}\text{ 在 }R^2\text{ 中稠密}).$$

则对任意 a，$P_a(D_t)=1$，$(t\geqslant 0)$．

实际上，以 $h_b^{(r)}$ 表圆 $(x:|x-b|\leqslant r)$ 的首中时，则由(16)

$$P_a(D_0) = P_a\left(\bigcap_b \bigcap_r (h_b^{(r)} < \infty)\right) = 1,$$

其中之交对一切二维有理点 b 及有理数 $r>0$ 进行. 其次

$$P_a(D_t) = P_a(\theta_t D_0) = E_a P_{x(t)}(D_0) = 1.$$

e. 由于对任意 $t>0$, $P_a(D_t)=1$; 故

$$\begin{aligned} P_a(\overline{\lim_{t\to\infty}}|x_t| = \infty) = 1; \\ P_a(\underline{\lim_{t\to\infty}}|x_t| = 0) = 1. \end{aligned} \tag{17}$$

f. 当 $n \geqslant 2$ 时, 任意单点集 $\{a\}$ 是极集. 为此, 只要在(14)中先令 $r\to 0$ 再令 $R\to\infty$, 即得 $P_a(e_0<\infty)=0$, 一切 $a\neq 0$, 其中 e_0 为 $\{0\}$ 的首中时. 其次, 由 $P_0(x_t=0)=0$, $(t>0)$, 得 $P_{x(t)}(e_0<\infty)=0$, (P_0-a. e.), 故

$$P_0(\theta_t e_0<\infty) = E_0 P_{x(t)}(e_0<\infty) = 0.$$

令 $t\downarrow 0$, 即得 $P_0(e_0<\infty)=0$. 于是得证

$$P_a(e_0<\infty)=0, \quad 一切 a, \tag{18}$$

亦即得证 $\{0\}$ 是极集. 类似可证任意单点集为极集.

然而由 c 中末所述, $n=1$ 时, 单点集都常返; 故一维布朗运动无非空极集.

g. $n\geqslant 3$ 维布朗运动是暂留的, 即

$$P_a(\lim_{t\to\infty}|x_t| = \infty) = 1. \tag{19}$$

因而它不常返. 注意, 此式加强了(17). 为证此, 令

$$T_m = \inf(t>0,\ |x_t|\leqslant m),\quad u_m = \inf(t>0,\ |x_t|\geqslant m^3).$$

由 §3 定理 1, $P_a(u_m<\infty)=1$, 一切 a, 一切正整数 m. 从而 $P_a(\theta_t u_m<\infty)=1$, $(t\geqslant 0)$. 故重新得证

$$P_a(\overline{\lim_{t\to\infty}}|x_t| = \infty) = 1. \tag{20}$$

由强马氏性及(15),

$$P_a(\theta_{u_m}(T_m) < \infty) = E_a P_{x(u_m)}(T_m < \infty)$$
$$= E_a\left[\left(\frac{m}{m^3}\right)^{n-2}\right] = m^{2(2-n)},$$

故对一切 a，有

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_a(|x(t+u_m)| \leqslant m \text{ 对某 } t)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_a(\theta_{u_m}(T_m) < \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{2(2-n)} < \infty.$$

根据 Borel-Cantelli 引理，上式首项中的事件以 P_a-概率 1 只出现有限多个；此与(20)结合即得证(19).

§5. Dirichlet 问题

（一）问题的提出与解决．设 A 为开集，$A \subset R^n$，$n \geqslant 2$．在 A 的边界 ∂A 上已给连续函数 f，需要求出在 $\bar{A}$ 连续、在 A 中调和的函数 h，而且满足边值条件

$$h(x) = f(x) \quad (x \in \partial A), \tag{1}$$

简称它为 D-问题，是 Gauss 于 1840 年提出的．Gauss 以为他已用"Dirichlet 原理"解决了它，但后来发现推理有错．1909 年 Zaremba 及 1913 年 Lebesgue 都给出了甚至当 A 有界时也无解之例．1924 年 Wiener 提出了广义的 D-问题，后者恒有解．但他未发现与布朗运动的联系；这种联系是 Kakutani 于 1944、Doob 于 1954 年发现的．

D-问题是否有解，依赖于边界 ∂A 上的点是否对 A^c 规则．粗略地说，A^c 在边界点的邻近不能太小，以使布朗粒子从边界点出发能立即击中 A^c，问题才有解．

如 A 有界且有解，则解必唯一；对无界的 A，则解可不唯一而有无穷多个．

D-问题在微分方程理论中已有很深入的研究，我们这里不追求问题的更广泛的提法，而把重点放在概率方法上。人们正是通过 D-问题最初发现布朗运动与位势间的关系的。

定理 1. 设 A 为有界开集，$A\subset R^n$，$n\geqslant 2$，则 D-问题有解的充要条件是 ∂A 的每一点都是 A^c 的规则点；此时解 $h(x)$ 唯一，而且可表为

$$h(x)=E_x f(x_e) \quad (x\in \overline{A}), \tag{2}$$

e 为 A 的首出时。

证. 1° 唯一：设 h_1，h_2 都是解，则 h_1-h_2 在 A 中调和，在 ∂A 上为 0．由 § 4 极大原理，得

$$h_1(x)=h_2(x), \quad (x\in\overline{A})$$

2° 充分：因 A 有界，由 § 3 系 1，$P_x(e<\infty)=1$．由于 ∂A 的每一点 b 对 A^c 规则，故 $P_b(e=0)=1$，因此，由(2)定义的 $h(x)$ 满足边值条件：

$$h(b)=E_b f(x_0)=f(b), \quad (b\in\partial A).$$

因 A 有界，f 在 ∂A 连续，故有界．由(2)定义的 $h(x)$ 有界可测，故局部可积．

以 T 表球面 $S_r(x)$ 的首中时，$x\in A$，$B_r(x)\subset A$．由强马氏性，(2)中 h 满足

$$\begin{aligned}h(x)&=E_x f(x(T+\theta_T e))=E_x E_{x(T)} f(x(e))\\&=E_x h(x(T)).\end{aligned} \tag{3}$$

故 h 在 A 中有球面平均性(参看 § 4，(7))．这连同局部可积性即知 $h(x)$ 在 A 中调和．

剩下要证(2)中的 $h(x)$ 在 $a\in\partial A$ 连续，亦即要证

$$\lim_{x\to a} E_x f(x_e)=f(a) \quad (x\in\overline{A}), \tag{4}$$

为此，先证对任 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{x\to a} P_x(|x_e-a|\geqslant\varepsilon)=0. \tag{5}$$

而利用 $|x_e-a|\leqslant|x_e-x|+|x-a|$，可见为证(5)，又只要证

$$\lim_{x\to a}P_x(|x_e-x|\geqslant\varepsilon)=0; \tag{6}$$

这是由于

$$(|x_e-a|\geqslant\varepsilon)\subset\left(|x_e-x|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(|x-a|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\lim_{x\to a}P_x(|x_e-a|\geqslant\varepsilon)\leqslant\lim_{x\to a}P_x\left(|x_e-x|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

下证(6)．我们有

$$\begin{aligned}P_x(|x_e-x|\geqslant\varepsilon)&=P_x(|x_e-x|\\&\geqslant\varepsilon, e\geqslant t)+P_x(|x_e-x|\geqslant\varepsilon, e<t)\\&\leqslant P_x(e\geqslant t)+P_x(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|x_s-x|\geqslant\varepsilon)\\&\leqslant P_x(e\geqslant t)+P_0(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|x_s|\geqslant\varepsilon)\\&=P_x(e\geqslant t)+P_0(T_\varepsilon\leqslant t),\end{aligned} \tag{7}$$

其中 T_ε 为开球 $\mathring{B}_\varepsilon(0)=(x:|x|<\varepsilon)$ 的首出时．因 0 是 $B_\varepsilon(0)$ 的内点，故是 $R^n\setminus\mathring{B}_\varepsilon(0)$ 的非规则点，从而

$$\lim_{t\to0}P_0(T_\varepsilon\leqslant t)=P_0(T_\varepsilon=0)=0;$$

故对 $\varepsilon_1>0$，存在 $t_0>0$，当 $t\leqslant t_0$ 时，

$$P_0(T_\varepsilon\leqslant t)<\frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{8}$$

固定如此的 $t=t_0$．由§3 定理 3，$P_x(e>t)$ 对 x 上连续；又 a 对 A^c 规则，故

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to a}}P_x(e\geqslant t_0)&\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}P_x\left(e>\frac{t_0}{2}\right)\\&\leqslant P_a\left(e>\frac{t_0}{2}\right)=0.\end{aligned}$$

故存在 $\delta > 0$，当 $x \in B_\delta(a) \cap \overline{A}$ 时，

$$P_x(e \geqslant t_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{9}$$

综合(7)—(9)知，对任何 $\varepsilon > 0$，$\varepsilon_1 > 0$，当 $x \in B_\delta(a) \cap \overline{A}$ 时，

$$P_x(|x_e - x| \geqslant \varepsilon) < \varepsilon_1.$$

于是(6)以及(5)得证.

由(5)及 f 的连续性，对 $\varepsilon_2 > 0$，$\varepsilon_3 > 0$，存在 $r > 0$，当 $x \in B_r(a) \cap \overline{A}$ 时，有

$$P_x(|f(x_e) - f(a)| > \varepsilon_2) < \varepsilon_3.$$

令 $B = (\omega: |f(x_e) - f(a)| > \varepsilon_2)$；得

$$\begin{aligned}|E_x f(x_e) - f(a)| &\leqslant E_x |f(x_e) - f(a)| \\ &= E_x(|f(x_e) - f(a)|; B) + E_x(|f(x_e) - f(a)|, B^c) \\ &\leqslant 2\|f\|\varepsilon_3 + \varepsilon_2,\end{aligned}$$

其中 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$，此得证(4).

3° 必要：即要证：如 D-问题对一切连续边值函数 f 有解，则每 $a \in \partial A$ 对 A^c 规则. 取 $f \geqslant 0$ 为定义在 ∂A 上的连续函数，而且只在一点 a 上，$f(a) = 0$. 由假设，存在连续于 $\overline{A}$、调和于 A 中的函数 $h(x)$，它在 ∂A 上等于 f. 由 §4(5)

$$h(x) = E_x[h(x_e)] = E_x f(x_e) \quad (x \in \overline{A}),$$

故

$$E_a f(x_e) = h(a) = f(a) = 0.$$

由此及 $f \geqslant 0$，得 $P_a(f(x_e) = 0) = 1$；但 f 只在 a 点为 0，故 $P_a(x_e = a) = 1$. 由于单点集 $\{a\}$ 为极集(见 §4，f)，则必有 $P_a(e = 0) = 1$，即 $a \in (A^c)^r$.

注 1. Wiener 提出的广义 D-问题是：设已给开集 A，在 ∂A 上已给连续函数 f，需要求出函数 h，它在 A 中调和，而且

对任意 $b\in\partial A\cap(A^c)^r$，有

$$\lim_{A\ni x\to b} h(x)=f(b); \tag{10}$$

当 A 有界时，仔细看上定理的证明 2°，可见(2)中的 $h(x)$ 仍是此广义 D-问题的解.但那里的唯一性证明 1° 不能通过，因为此时极大原理不能用.不过可以证明解仍是唯一的(见文献[18]第 5 章 § 5).

注 2. 今考虑任意开集(未必有界) A 及定义在 ∂A 上的有界连续函数 f，如 $\partial A\subset(A^c)^r$，则 D-问题有解为

$$h(x)=E_x[f(x_e);\ e<\infty]+cP_x(e=\infty), \tag{11}$$

c 为任意常数. 实际上，仿定理 1 中的证明 2°，可见 $E_x[f(x_e),\ e<\infty]$ 仍是 D-问题之一解. 特别，取 $f=1$，则 $P_x(e<\infty)$ 是边值为 1 之 D-问题之解；$P_x(e=\infty)$ 是边值为 0 之 D-问题之解. 因此，对任意常数 c，(11)是原 D-问题之解. 进一步还可证明：D-问题的任一解必呈(11)形(见[15; 17]).

注 3. 在 Zaremba 的反例中，$A=\mathring{B}_1\setminus\{0\}$ 是去掉原点的单位开球，边值函数 f 是：$f(0)=1$，$f(x)=0$，$x\in S_1$ (单位球面). $\{0\}$是极集. 广义 D-问题有解为 $h(x)=E_xf(x_e)=0$，$x\in A$. (注意 $h(0)\neq 1$). 但 D-问题无解. 关于 Lebesgue 的反例及其物理解释，见文献 [12] § 7.12.

(2) 式开创了用概率方法解数学分析问题的先例. 关于一般的椭圆型方程等的概率解法可见[8]第 13 章及[9]. 以某些方程的概率表示为理论基础的 Monte-Calro 方法，给出了这些方程的数值解.

定理 1 可如下推广：设 A 为有界开集，$\partial A\subset(A^c)^r$，f 为 ∂A 上的连续函数，e 为 A 的首出时，则

$$\Phi_\lambda(x)=E_xe^{-\lambda e}f(x_e)\quad(\lambda\geq 0) \tag{12}$$

在 A 中二次连续可微，而且是微分方程

$$\lambda \Phi_\lambda(x) - \frac{1}{2} \Delta \Phi_\lambda(x) = 0 \quad (x \in A) \tag{13}$$

在边值条件

$$\lim_{A \ni x \to a} \Phi_\lambda(x) = f(a) \quad (a \in \partial A)$$

下的唯一解（证见文献[5]卷 2，第 4 章 § 4）.

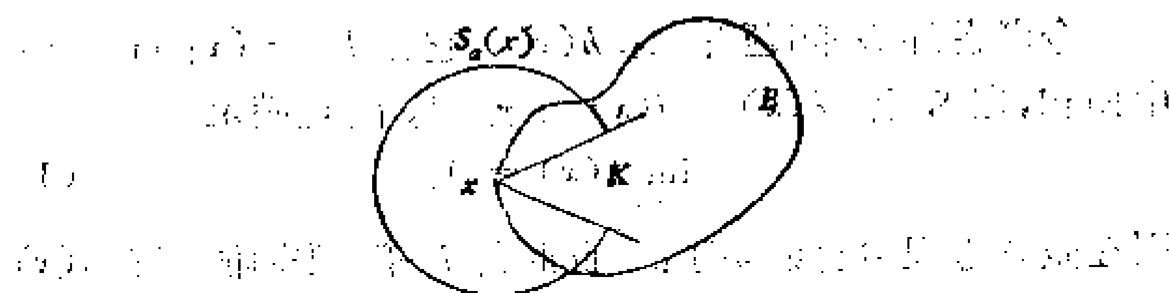
如 $\lambda = 0$，则得定理 1；如 $f \equiv 1$，则得 e 的分布的拉氏变换.

（二）锥判别法．由定理 1 可见点的规则性起着重要作用．至于判断边界点是否规则，有下列简单的、Poincaré 的锥判别法.

称 R^n 中集 K 为顶点在 $b \in R^n$ 的锥，如存在单位向量 $u \in R^n$ 及常数 $\alpha > 0$，使 $K = (x: x \in R^n, |(x-b) \cdot u| \geqslant \alpha |x-b|)$．设 $B_a(b)$ 为以 b 为心、以 $a > 0$ 为半径的球，称 $K \cap B_a(b)$ 为一锥顶.

定理 2. 设 $B \in \mathscr{B}^n$，$x \in \partial B$．如存在以 x 为顶点的锥顶 $K \cap B_a(x) \subset B$，则 $x \in B^r$.

证．以 h_a 表球面 $S_a(x)$ 的首中时．由 § 3 定理 2



$$P_x(x(h_a) \in B \cap S_a(x)) = U_a(B \cap S_a(x)) \geqslant U_a(K \cap S_a(x)).$$

注意 $U_a(K \cap S_a(x)) = \beta > 0$ 与 $a > 0$ 无关．由于

$$(x(h_a) \in B) \subset (h_B \leqslant h_a),$$

h_B 为 B 的首中时，故

$$P_x(h_B \leqslant h_a) \geqslant P_x(x(h_a) \in B) \geqslant P_x(x(h_a) \in B \cap S_a(x)) \geqslant \beta > 0.$$

由§3定理1 (ii)，$P_x(\lim_{a \to 0} h_a = 0) = 1$. 在上式中令 $a \to 0$，得 $P_x(h_B = 0) \geqslant \beta > 0$. 根据 0-1 律，$P_x(h_B = 0) = 1$. 故 $x \in B^r$.#

锥法虽只给出充分条件，但简单好用．至于充要条件则有 Wiener 判别法：

设 $B \in \mathscr{B}^n, (n \geqslant 3)$. $B_m = (y: y \in B, \lambda^{m+1} < |y - x| \leqslant \lambda^m)$，其中常数 $0 < \lambda < 1$，又 $x \in R^n$ 为定点．则 $x \in B^r$ 的充要条件是 $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m(2-n)} C(B_m) = \infty$，$C(B_m)$ 表 B_m 的容度．(见文献[12]及[17])．$n = 2$ 时也有类似结果．

(三) 球的 D-问题．设 $n \geqslant 3$，A 为开球 $\mathring{B}_r$，$r > 0$．一方面，由微分方程知：D-问题的解由下列 Poisson 公式给出：

$$h(x) = \int_{S_r} r^{n-2} \frac{|r^2 - |x|^2|}{|x - z|^n} f(z) U_r(dz), \quad |x| < r. \tag{14}$$

今考虑外 D-问题[1]：求 $h(x)$，它在 $B_r^c = (x: |x| > r)$ 中调和，在 S_r 上，$h(x) = f(x)$；f 连续，而且满足

$$\lim_{|x| \to \infty} h(x) = 0. \tag{15}$$

则在微分方程中也证明了：此时外 D-问题有唯一解 $h(x)$，它仍然由(14)给出，但其中 $|x| > r$.

现在转到概率方面．以 e 表 S_r 的首中时，由定理1知，此 D-问题的解为

---

1) 参看文献[6]卷2，第4章，§2.2及[20]第4章§2，§4.

$$h(x)=E_xf(x_e)=E_x(f(x_e),e<\infty),\ (|x|<r). \tag{16}$$

现在证明，外 D–问题的解 $h(x)$ 也由(16)给出，但 $|x|>r$。实际上，由注 2 已知(16)中 $h(x)$，$(|x|>r)$ 是一解；其次，由方程论知在附加条件(15)下，外 D–问题的解唯一。因此，只需验证(16)中 $h(x)$，$(|x|>r)$ 满足(15)。为此，先注意由 § 4(15)

$$\lim_{|x|\to\infty}P_x(e=\infty)=1.$$

故

$$\lim_{|x|\to\infty}|h(x)|\leqslant\lim_{|x|\to\infty}E_x(|f(x_e)|,e<\infty)$$

$$\leqslant\|f\|\lim_{|x|\to\infty}P_x(e<\infty)=0.$$

综合上述两方面，得

$$E_xf(x_e)=\int_{S_r}r^{n-2}\frac{|r^2-|x|^2|}{|x-z|^n}f(z)U_r(dz),\ (x\bar{\in}S_r). \tag{17}$$

由此推知，球面 S_r 的首中点有分布为

$$P_x(x_e\in A)=\int_A\frac{r^{n-2}|r^2-|x|^2|}{|x-z|^n}U_r(dz),\ (x\bar{\in}S_r), \tag{18}$$

其中 $A\subset S_r$ 为可测集。特别，取 $x=0$，此式化为 § 3,(18)。

注 4．我们已看到，(17)右方所定义的 x 的函数在 $\mathring{B}_r$ 中调和。将此式再推进一步，就得出 $\mathring{B}_r$ 中一切调和函数的 Poisson 积分表示．这就是：$H(x)$ 为非负、在 $\mathring{B}_r$ 中调和的函数的充要条件是：存在 S_r 上测度 μ，使

$$H(x)=\int_{S_r}\frac{r^{n-2}(r^2-|x|^2)}{|x-z|^n}\mu(dz),\ (x\in\mathring{B}_r), \tag{19}$$

其中测度 μ 有穷而且被 H 唯一决定(见文献[17]第 4 章，§ 4)。

至于在一般开集中调和、非负函数，也有积分表示；为此，需引进所谓 Martin 边界，它起着类似于(19)中 S_r 的作用。

§6. 禁止概率与常返集

（一）三个重要函数．设 $B\in\mathscr{B}^n$，$\mathscr{B}$ 的首中时为 h_B，首中点为 $x(h_B)$．如§3 所述，有首次通过公式

$$P_x(x_t\in A)-\int_0^t\int_{\bar{B}}P_x(h_B\in ds,\ x(h_B)\in dz)P_z(x_{t-s}\in A)$$
$$=P_x(h_B>t,\ x_t\in A).\qquad(1)$$

作为 A 的测度，左方有密度为

$$p(t,x,y)-\int_0^t\int_{\bar{B}}P_x(h_B\in ds,\ x(h_B)\in dz).$$
$$p(t-s,z,y)\equiv q_B(t,x,y).\qquad(2)$$

简写左方的二重积分为 $\Phi(y)$．取 $y_n\to y$，由 Fatou 引理，

$$\varliminf_{y_n\to y}\Phi(y_n)\geqslant\Phi(y).$$

故 $\Phi(y)$ 下连续，从而由(2)定义的 $q_B(t,x,y)$ 对 y 上连续．既然(1)之右方非负，$q_B(t,x,y)$ 关于勒贝格测度几乎处处非负；由上连续性，它对一切 y 非负．由(1)知，作为 A 的测度 $P_x(h_B>t,x_t\in A)$ 有密度，可取它为 $q_B(t,x,y)$．由于 $P_x(h_B>t,x_t\in A)$ 是自 x 出发，在首中 B（或首出 B^c）以前，于 t 时到达 A 之概率，故可称 $q_B(t,x,y)$ 为禁止密度．

今引入三个重要函数，它们分别是三个密度的拉氏变换．对 $\lambda\geqslant0$，定义

$$g^\lambda(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p(t,x)dt,\qquad(3)$$

$$g_B^\lambda(x,y)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}q_B(t,x,y)dt,\qquad(4)$$

$$H_B^\lambda(x, dz) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in dz). \tag{5}$$

如 $\lambda = 0$，简记 $g^0(x)$ 为 $g(x)$ 等等．它们有性质：

1) $g^\lambda(0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} dt = \infty$，$(n > 1)$

$g^\lambda(x)$ 在 $x \neq 0$ 连续，而且 $\lim\limits_{x\to\infty} g^\lambda(x) = 0$。

2) $g^\lambda(y - x) \geqslant g_B^\lambda(x, y)$.

此因 $p(t, y - x) \geqslant q_B(t, x, y)$.

3) 测度 $H_B^\lambda(x, dz)$ 集中在 $\bar{B}$ 上，而且

$$\begin{aligned} & E_x e^{-\lambda h_B} f(x(h_B)) \\ & \quad = \int_{\bar{B}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(z) P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in dz) \\ & \quad = \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) f(z). \end{aligned} \tag{6}$$

4) $$E_x \int_0^{h_B} f(x_t) e^{-\lambda t} dt = \int g_B^\lambda(x, y) f(y) dy. \tag{7}$$

实际上，左方等于

$$\begin{aligned} & E_x \int_0^\infty f(x_t) e^{-\lambda t} \chi_{(h_B > t)} dt \\ & \quad = \iint_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B > t, x_t \in dy) f(y) dt \\ & \quad = \iint_0^\infty e^{-\lambda t} q_B(t, x, y) f(y) dy dt. \end{aligned}$$

5) $$g^\lambda(x) = g^\lambda(-x). \tag{8}$$

6) $$g_B^\lambda(x, y) = g_B^\lambda(y, x). \tag{9}$$

这是由于

$$q_B(t, x, y) = q_B(t, y, x). \tag{10}$$

后者的证明见文献[17]第二章定理 4.3 或[8]引理 14.1.

7) 如 $x \in B^r$ 或 $y \in B^r$，则

$$g_B^\lambda(x, y) = 0. \tag{11}$$

实际上，如 $x \in B^r$，则 $P_x(h_B = 0, x(h_B) = x) = 1$，故由(2)得 $q_B(t, x, y) = 0$，从而 $g_B^\lambda(x, y) = 0, (x \in B^r)$. 由对称性(9)即得 $g_B^\lambda(x, y) = 0 \ (y \in B^r)$.

今取首次通过公式的拉氏变换形式，以便于应用. 以 $e^{-\lambda t}$ 乘(2)两边，对 t 积分，得

$$g^\lambda(y - x) = \int_B \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_0^t P_x(h_B \in ds, x(h_B) \in dz) \cdot p(t - s, y - z) \right] dt + g_B^\lambda(x, y).$$

利用拉氏变换的卷积公式，得

$$g^\lambda(y - x) = \int_B H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(y - z) + g_B^\lambda(x, y). \quad (12)$$

由首尾二项关于 x, y 的对称性，得

$$\int_B H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(y - z) = \int_B H_B^\lambda(y, dz) g^\lambda(x - z). \quad (13)$$

在(12)中令 $\lambda \to 0$，利用(6)及单调收敛定理，得**势的基本公式**:

$$g(y - x) = \int_B H_B(x, dz) g(y - z) + g_B(x, y), \quad (B \in \mathscr{B}^n, n \geqslant 3). \quad (14)$$

此式有概率意义：自 x 出发，在 y 点附近的平均停留时间，等于首中 B 以前在 y 附近的平均停留时间，加上首中 B 以后在 y 附近的平均停留时间. 后者由(14)中积分项给出.

(二) 常返集.

定理 1. 设 $f(x), x \in R^n$ 为有界可测函数，满足 $f = T_t f$ (对某 $t > 0$)，则 f 恒等于一常数.

证. 先证一事实：关于任一紧集中的 x, y，均匀地有

$$\lim_{t \to \infty} (T_t f(x) - T_t f(y)) = 0.$$

实际上，

$$|T_tf(x)-T_tf(y)|=\left|\int(p(t,x,z)-p(t,y,z))f(z)dz\right|$$

$$\leqslant\|f\|\int|p(t,x,z)-p(t,y,z)|dz$$

$$=\|f\|\int|p(1,z)-p(1,z+(x-y)/\sqrt{t})|dz.$$

由于 $p(1,z)$ 连续、可积，故当 $t\to\infty$ 时，右方关于紧集中的 x，y 均匀地趋于0．

由 $T_tf=f$，利用 $\{T_t\}$ 的半群性得 $T_{mt}f=f$ 对一切正整数 m 成立，于是由上述事实，对任意 x，y，

$$f(x)-f(y)=\lim_{m\to\infty}(T_{mt}f(x)-T_{mt}f(y))=0_{\#}$$

定理 2. 设 $B\in\mathscr{B}^n$，$(n\geqslant1)$，只有两种可能：

(i) 或者 $P_x(h_B<\infty)=1$；

(ii) 或者对一切 x，当 $t\to\infty$ 时，

$$P_x(\theta_t(h_B<\infty))=P_x(x_s\in B\text{ 对某 }s>t)\to0.$$

证．令 $\varphi(x)=P_x(h_B<\infty)$，$T_t\varphi$ 对 t 不增（参看(18)），故

$$\varphi(x)\geqslant T_t\varphi(x)\downarrow r(x),\ (t\to\infty).\tag{15}$$

在 $T_tT_s\varphi(x)=T_{t+s}\varphi(x)$ 中，令 $s\to\infty$，由控制收敛定理及定理 1

$$T_tr(x)=r(x)=c\geqslant0,\ (c\text{ 为常数}).\tag{16}$$

在

$$P_x(t<h_B<\infty)=\int q_B(t,x,y)\varphi(y)dy$$

$$\geqslant cP_x(h_B>t)$$

中，令 $t\to\infty$，得

$$0=cP_x(h_B=\infty).\tag{17}$$

于是或者 $P_x(h_B=\infty)=0$，此即(i)；或者 $c=0$，此时在

$$T_t\varphi(x) = E_x\varphi(x_t) = E_x P_{x(t)}(h_B < \infty)$$
$$= P_x(\theta_t(h_B < \infty)) = P_x(x_s \in B,\ \text{对某}\ s > t) \tag{18}$$

中，令 $t \to \infty$，并利用(15)(16)即得(ii)$_\#$

在情况(i)，称 B 为常返集；在(ii)为暂留集(勿与§4中过程的常返性等混淆)．由§4(15)，当 $n \geqslant 3$，一切球，从而一切有界可测集，是暂留集．由(18)知(i)等价于 $P_x(\theta_t(h_B < \infty)) = 1$，$t \geqslant 0$．又 $T_t\varphi \uparrow \varphi$，$t \downarrow 0$．

对一、二维布朗运动，定理2可加强(比较§4(三)c)．

系1．对 $B \in \mathscr{B}^n(n = 1, 2)$，只有两种可能：

(i) 或者 $P_x(h_B < \infty) = 1$；

(ii) 或者 $P_x(h_B < \infty) = 0$．

证．由§2定理1，$\int_0^\infty p(s, x, y)ds = \infty$．故对任意可测、非负、不几乎处处(关于 L)为0的 $f(x)$，有

$$\int_0^t T_s f(x)ds = \int\left(\int_0^t p(s, x, y)ds\right)f(y)dy \to \infty,$$
$$(t \to \infty). \tag{19}$$

令 $\varphi(x) = P_x(h_B < \infty)$，由 $T_t\varphi \leqslant \varphi \leqslant 1$，对 $h > 0$ 有

$$0 \leqslant \int_0^t T_s(\varphi - T_h\varphi)ds = \int_0^t T_s\varphi ds$$
$$- \int_h^{t+h} T_s\varphi ds \leqslant 2h.$$

对照(19)，可见 $\varphi = T_h\varphi$ (L-a. e. x)；于是 $T_t\varphi = T_t(T_h\varphi)$．再令 $t \downarrow 0$，即得 $\varphi = T_h\varphi$ 对一切 x 成立．从而得知 $\varphi(x)$ 等于(15)中的 $r(x)$；由(16)，$\varphi \equiv c(\geqslant 0)$ 为常数，并且(17)成立．当 $c = 0$ 时即是情况(ii)$_\#$

系1也可改述为：当 $n = 1$ 或2时，除极集外，一切非空

可测集都是常返集.

然而，当 $n=1$ 时，在§4(三)中已证明非空极集不存在，故此时只有一种可能(i)，即一切非空可测集皆常返.

至于判断一个集是否常返，也有锥判别法. 直观地想，如 $n\geqslant 3$，集必须充分大才能常返.

定理 3. 设 $B\in\mathscr{B}^n$，$n\geqslant 3$，如存在锥 K 及 $r>0$，使 $(x: x\in K,\ |x|\geqslant r)\subset B$，则 B 常返.

证. 由平移不变性，不妨设 K 的顶点在 O，于是 $K=(x: |x\cdot u|\geqslant\alpha|x|)$，$u$ 为某单位向量，$\alpha>0$. 显然，对任意常数 $c>0$，$\sqrt{c}K=K$. 由尺度不变性

$$P_0(x(t)\in K)=P_0\left(\frac{x(ct)}{\sqrt{c}}\in K\right)=P_0(x(ct)\in K),$$

故 $P_0(x(t)\in K)=d>0$，d 为常数. 由 $\lim\limits_{t\to\infty}P_0(|x(t)|\geqslant r)=1$，得

$$\lim_{t\to\infty}P_0(\theta_t(h_B<\infty))\geqslant\varlimsup_{t\to\infty}P_0(x(t)\in B)$$

$$\geqslant\lim_{t\to\infty}P_0(x(t)\in K,\ |x(t)|\geqslant r)=d>0.$$

由定理 2 知 B 常返#

注 1. 设 $B\in\mathscr{B}^n$，$n\geqslant 3$，$\lambda>1$，令 $B_m=(x: x\in B,\ \lambda^m\leqslant|x|<\lambda^{m+1})$，则 B 为常返的充要条件是

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m(2-n)}C(B_m)=\infty,$$

$C(B_m)$ 表 B_m 的容度. 证见[17].

(三) 收敛引理. 下二引理很有用，特别，引理 2 可用来研究无界开集.

引理 1. 设 B 及 B_m 皆为闭集，又 $\mathring{B}_m$ 表 B_m 的内点集，

$$B_1\supset\mathring{B}_1\supset B_2\supset\mathring{B}_2\supset\cdots\supset B=\bigcap_m B_m=\bigcap_m\mathring{B}_m,$$

则对 $x\in B^c\cup B^r$，有

$$P_x(h_{B_m}\uparrow h_B)=1,\quad (m\to\infty).$$

证. 显然 h_{B_m} 不降，$0\leqslant h_{B_m}\uparrow h\leqslant h_B$. 如 $h=\infty$，则引理成立. 如 $x\in B^r$，则 $P_x(h_B=0)=1$，引理也成立. 故只要考虑 $h<\infty$，$x\in B^c$ 的情形. 由于 B 及 B_m 闭，轨道连续，

$$B_m\ni x(h_{B_m})\to x(h)\in\bigcap_m B_m=B.$$

故如 $h>0$，则必[1] $h\geqslant h_B$. 但当 $x\in B^c$ 时，$P_x(h>0)=1$，故 $P_x(h=h_B)=1$ #

注 2. 如 $x\bar{\in}B^c\cup B^r$，即如 $x\in B\cap(B^r)^c$，则 $P_x(h_{B_m}=0)=1$，$P_x(h_B>0)=1$，故 $P_x(h_{B_m}\uparrow h_B)=0$，而引理 1 结论不成立.

引理 2. 设 G 为非空开集，则存在一列上升开集 G_m，其紧闭包含于 G，使

1. $G_1\subset\overline{G}_1\subset G_2\subset\overline{G}_2\subset\cdots$，$\bigcup_m G_m=G$；

2. ∂G_m 的每一点对 G_m^c 规则；

3. $P_x(h_{\partial G_m}\uparrow h_{\partial G})=1$，$x\in G$.

证. 取一列紧集 K_m，使 $K_1\subset K_2\subset\cdots$，$\bigcup_m K_m=G$. 用有限多个开球遮盖 K_1，并使这些开球之和 D 满足 $\overline{D}\subset G$. 有必要时改变某些球的半径. 用锥判别法（§5 定理 2）知，∂D 的每一点对 D^c 规则. 取 $G_1=D$，于是 $\overline{G}_1\subsetneq G$，而且 ∂G_1 的点对 G_1^c 规则. 同样手续施之于 $\overline{G}_1\cup K_2$ 而得 $G_2,\cdots$. $\{G_m\}$ 满足 1 与 2，故

---

1) 但如 $h=0$，由 $x(h)\in B$ 未必有 $h\geqslant h_B=\inf(t>0,\ x_t\in B)$，注意此中 $t>0$，而非 $t\geqslant0$. 例如，设 $x_0=x$ 对 B 非规则，$x\in B$，则 $P_x(h=0)=1$，但 $P_x(h_B>0)=1$.

$$G_1^c \supset (G_1^c)^r \supset G_2^c \supset \cdots, \quad \bigcap_m G_m^c = G^c.$$

由引理 1，$P_x(h_{G_m^c} \uparrow h_{G^c}) = 1 \ (x \in G)$. 但 $P_x(h_{\partial G} = h_{G^c}) = 1 \ (x \in G)$；$P_x(h_{\partial G_m} = h_{G_m^c}) = 1 \ (x \in G_m)$，故由上式得 $P_x(h_{\partial G_m} \uparrow h_{\partial G}) = 1 \ (x \in G)$#

§7. 测度的势与 Balayage 问题

（一）唯一性. $n \geqslant 3$ 维布朗运动的势核 $g(x, y) = g(y-x)$ 取为

$$g(y-x) = c_n |x-y|^{2-n}, \quad c_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \Big/ 2\pi^{n/2}. \tag{1}$$

对 $\mathscr{B}^n$ 可测函数 f，如下列积分存在，定义 f 的牛顿势为 Gf：

$$Gf(x) = \int g(y-x) f(y) dy. \tag{2}$$

对 $\mathscr{B}^n$ 上的测度 μ，定义 μ 的牛顿势为 $G\mu$，

$$G\mu(x) = \int g(y-x) \mu(dy), \tag{3}$$

其中 $\int = \int_{R^n}$. 如 $f \geqslant 0$，可视(2)为(3)的特殊情形，故主要考虑(3)，它把测度 μ 变为函数 $G\mu(x)$.

由 §1 引理 3，如 $\mu(R^n) < \infty$，则 $G\mu(x) < \infty$，(L-a. e).

引理 1. 如 $G\mu(x) < \infty$，则

$$G\mu(x) - T_t G\mu(x) = \int_0^t T_s \mu(x) ds. \tag{4}$$

证.

$$T_t G\mu(x) = \iint g(y-z) \mu(dy) p(t, z-x) dz$$

$$= \iiint_0^\infty p(s, y-z)ds\mu(dy)p(t, z-x)dz$$

$$= \iint_0^\infty p(s+t, y-x)ds\mu(dy)$$

$$= \iint_t^\infty p(s, y-x)ds\mu(dy);$$

$$\int_0^t T_s\mu(x)ds = \int_0^t \int p(s, y-x)\mu(dy)ds.$$

所以

$$T_t G\mu(x) + \int_0^t T_s\mu(x)ds = \iint_0^\infty p(s, y-x)ds\mu(dy)$$

$$= \int g(y-x)\mu(dy) = G\mu(x).$$

定理 1. 设 μ 为有限测度，则 $G\mu$ 唯一决定 μ.

证. 1° 设有二测度 μ 与 ν 使

$$G\mu = G\nu < \infty, \quad (L\text{-a.e.}).$$

如在点 x 上此式成立，则由引理 1

$$\int_0^t T_s\mu(x)ds = \int_0^t T_s\nu(x)ds. \tag{5}$$

2° 取任意非负、连续于 R^n 且有紧支集的函数 f，利用 $p(s, x, y)$ 对 x, y 的对称性，有

$$\int\left(\frac{1}{t}\int_0^t T_s f ds\right)d\mu$$

$$= \int\left(\frac{1}{t}\int_0^t \int p(s, x, y)f(y)dyds\right)\mu(dx)$$

$$= \int \frac{1}{t}\int_0^t T_s\mu(y)dsf(y)dy$$

$$= \int \frac{1}{t}\int_0^t T_s\nu(y)dsf(y)dy$$

$$= \int\left(\frac{1}{t}\int_0^t T_s f ds\right)d\nu.$$

由§2引理3，对 $x\in R^n$ 均匀地有 $T_t f\to f\ (t\to 0)$，利用 $\varepsilon-\delta$ 方法及测度有限，易见 $\int f d\mu=\int f d\nu$. 由 f 的任意性，$\mu=\nu$.

（二）极大值原理.

定理 2. 设 μ 为有限测度，其支集为 B，又 $N\subset B$，$\mu(N)=0$. 如 $G\mu(x)\leqslant M<\infty$，一切 $x\in N^c\cap B$，则

$$\sup_{x\in R^n} G\mu(x)\leqslant M. \tag{6}$$

证. 1° 由§6 (14)

$$g(y-x)=\int_{\bar{B}} H_B(x,dz)g(y-z)+g_B(x,y). \tag{7}$$

对任意 $\varepsilon>0$，令 $A=(x:G\mu(x)<M+\varepsilon)$. 以 A 代入(7)中的 B，双方对 $\mu(dy)$ 积分，因 μ 有支集 B，得

$$\begin{aligned} G\mu(x)&=\int_{\bar{A}} H_A(x,dz)G\mu(z)+\int_B g_A(x,y)\mu(dy) \\ &=\int_{\bar{A}} H_A(x,dz)G\mu(z)+\int_{B\cap N^c} g_A(x,y)\mu(dy). \end{aligned} \tag{8}$$

2° 下证 $g_A(x,y)=0$，一切 $y\in B\cap N^c$；从而最后一积分为0. 由于 $B\cap N^c\subset A$，由§6，7)，只要证 A 中点皆对 A 规则，从而 $g_A(x,y)=0$，$(y\in A)$. 用反证法，设 $a\in A$，$a\in A^r$，则

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} P_a(x_t\in A)&\leqslant \lim_{t\to 0} P_a(h_A\leqslant t) \\ &=P_a(h_A=0)=0. \end{aligned} \tag{9}$$

由引理1

$$\begin{aligned} G\mu(a)&\geqslant T_t G\mu(a)\geqslant\int_{A^c} p(t,y-a)G\mu(y)dy \\ &\geqslant (M+\varepsilon)P_a(x_t\bar{\in} A). \end{aligned}$$

令 $t\to 0$，由(9)得 $G\mu(a)\geqslant M+\varepsilon$，此与 $a\in A$ 矛盾.

3° 于是由(8)及2°

$$G\mu(x)=\int_{\bar{A}} H_A(x,dz)G\mu(z),\ (x\in R^n). \tag{10}$$

如能证在 $\bar{A}$ 上，$G\mu(z)\leqslant M+\varepsilon$，则由上式立得(6)．下面会证明 $G\mu(x)$ 下连续，故 $(x: G\mu(x)\leqslant M+\varepsilon)$ 闭．既然它包含 A，故也包含 $\bar{A}$．

4° 今证 $G\mu(x)$ 下连续．由 Fatou 引理

$$\varliminf_{x\to a} G\mu(x)=\varliminf_{x\to a}\iint_0^\infty p(t,x,y)dt\mu(dy)$$

$$\geqslant\iint_0^\infty \varliminf_{x\to a} p(t,x,y)dt\mu(dy)$$

$$=\iint_0^\infty p(t,a,y)dt\mu(dy)=G\mu(a).$$

注 1．极大值原理可以如下直观解释．由于 μ 之支集为 B，故

$$G\mu(x)=\int_B g(y-x)\mu(dy),\ (x\in R^n). \tag{11}$$

$G\mu(x)$ 可视为自 x 出发，在 B 中的关于 μ 加权平均的停留时间．今如自 $x\in B^c$ 出发，此时间自应从进入 B 时开始算起．设由点 $b\in B$ 进入 B，则

$$G\mu(x)\approx G\mu(b).$$

回忆 $g^\lambda(x)$ 的定义(§6，(3))，令

$$G^\lambda\mu(x)=\int g^\lambda(y-x)\mu(dy). \tag{12}$$

定理 2′．设 μ 为有限测度，其支集为 B．则

$$G^\lambda\mu(x)\leqslant\sup_{y\in B}G^\lambda\mu(y),\quad (x\in R^n). \tag{13}$$

证明与定理 2 之证明类似，只要以 $e^{-\lambda t}T_t$ 代替那里的 T_t．

（三）Balayage 问题（简称 B-问题）．以 $\mathscr{M}$ 表所有使势 $G\mu(x)$ 为局部可积的有限测度 μ 之集．所谓 B-问题是：设

已给集 $B\in\mathscr{B}^n$ 及 $\mu\in\mathscr{M}$. 试求 $\mu'\in\mathscr{M}$,其支集含于 B^r,并且使

$$G\mu'(x)=G\mu(x),\quad (x\in B^r) \tag{14}$$

$$G\mu'(x)\leqslant G\mu(x),\quad (x\in R^n, n\geqslant 3). \tag{15}$$

下面试解决此问题. 以 $H_B(x,A)=P_x(x(h_B)\in A)$表$B$的首中点分布,定义测度 μ'

$$\mu'(A)=\mu H_B(A)=\int H_B(x,A)\mu(dx). \tag{16}$$

定理 3. 设B为紧集,则 μ' 是 B-问题的唯一解.

证. $H_B(x,\cdot)$ 集中在 $\bar{B}=B$ 上, 但 $B\cap(B^r)^c$ 为极集(见 § 11 定理 3), 故 $H_B(x,\cdot)$, 因而 μ' 集中在 B^r 上. 在 § 6 (13)中令 $\lambda\downarrow 0$, 得

$$\int_{B^r} H_B(x,dz)g(y-z)=\int_{B^r} H_B(y,dz)g(x-z). \tag{17}$$

又

$$\begin{aligned}
G\mu'(x) &= G\mu H_B(x)=\int_{B^r} g(x-z)\mu H_B(dz)\\
&= \int_{B^r} g(x-z)\int H_B(y,dz)\mu(dy)\\
&= \int\left[\int_{B^r} g(x-z)H_B(y,dz)\right]\mu(dy)\\
&\overset{(17)}{=} \int\left[\int_{B^r} g(y-z)H_B(x,dz)\right]\mu(dy)\\
&= \int_{B^r} H_B(x,dz)G\mu(z)\\
&= H_BG\mu(x)\leqslant G\mu(x).
\end{aligned} \tag{18}$$

最后不等式是由于 § 6 (14). 由 (18) 知 $\mu'\in\mathscr{M}$ 而且满足(15). 如 $x\in B^r$, 则 $H_B(x,\cdot)$集中在点 $\{x\}$ 上,故由(18)的中间推演,有

$$G\mu H_B(x) = \int_{B^r} H_B(x, dz) G\mu(z) = G\mu(x),$$

此得证(14). 最后证解的唯一性. 设 ν 也是解，则 ν 之支集含于 B^r. 由 §6(14)，并注意 $g_B(x, y) = 0$，$y \in B^r$ (参看 §6, 7)),得

$$\begin{aligned} G\nu(x) &= \int_{B^r} \int_{B^r} H_B(x, dz) g(y - z) \nu(dy) \\ &= \int_{B^r} H_B(x, dz) G\nu(z) \overset{(14)}{=} \int_{B^r} H_B(x, dz) G\mu(z) \\ &= H_B G\mu(x) \overset{(18)}{=} G\mu H_B(x), \quad (x \in R^n). \end{aligned}$$

由唯一性,即得 $\nu = \mu H_B$.

近年来提出了反 B-问题：设 B 为紧集,已给 ∂B 上之概率测度 ν，试求概率测度 μ,使

$$\mu H_{B^c} = \nu, \tag{19}$$

其中 $\mu H_{B^c}(\cdot) = P_\mu(x(e_B) \in \cdot)$，$e_B \equiv h_{B^c}$ 为首出 B (或首中 B^c) 的时间. 满足(19)的一切概率测度记为 $M(\nu)$. 在[14]中证明了：$\mu \in M(\nu)$ 等价于下列三条件中的任何一个：

1° $G\mu \geqslant G\nu$；而且 $G\mu(x) = G\nu(x)$，$x \in B^c$.

2° $\int h d\mu = \int h d\nu$ 对一切调和于 $\mathring{B}$ 连续于 B 的函数 h 成立.

3° $\int f d\mu \geqslant \int f d\nu$ 对一切上调和于 $\mathring{B}$ (定义见 §13) 连续于 B 的函数 f 成立.

§8. 平衡测度

(一) 定义. 设 F_m 与 F 为 $\mathscr{B}^n$ 上的测度，如果

$$\sup_{A \in \mathscr{B}^n} |F_m(A) - F(A)| \to 0, \quad (m \to \infty),$$

则说 F_m 强收敛到 F. 因而强收敛关于 A 是均匀的.

设 $n \geq 3$, B 为相对紧集. 取 $r > 0$ 充分大，使 $B \subset \mathring{B}_r$. 又 S_r 为球面 $(x: |x| = r)$. 对球外的点 x, $|x| > r$, 由强马氏性有

$$H_B(x, A) = \int_{S_r} H_{S_r}(x, d\xi) H_B(\xi, A), \tag{1}$$

其中 $H_D(x, \cdot)$ 为自 x 出发，集 D 的首中点分布. 由(1)

$$\frac{H_B(x, A)}{g(x)} = \int_{S_r} \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} H_B(\xi, A). \tag{2}$$

引理 1. 在强收敛下，有

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} = \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi), \tag{3}$$

其中 U_r 为 S_r 上均匀分布，常数 c_n 由 §2(9)定义.

证. 由 §5(18)

$$\lim_{|x| \to \infty} \sup_A \left| \int_A \frac{H_{S_r}(x, d\xi)}{g(x)} - \int_A \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) \right|$$

$$\leq \lim_{|x| \to \infty} \sup_A \int_A \frac{r^{n-2}}{c_n} \left| \frac{\left||x|^2 - r^2\right| |x|^{n-2}}{|\xi - x|^n} - 1 \right| U_r(d\xi)$$

$$\leq \lim_{|x| \to \infty} \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} \left| \frac{\left||x|^2 - r^2\right| |x|^{n-2}}{|\xi - x|^n} - 1 \right| U_r(d\xi) = 0,$$

这里可在积分号下取极限，因为当 $|x| \to \infty$ 时被积函数有界.

由(1)及引理 1，对任意 $A \in \mathscr{B}^n$，有

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{H_B(x, A)}{g(x)} = \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) H_B(\xi, A). \tag{4}$$

这样便证明了

定理 1. 设 B 为相对紧集，则测度

$$\mu_B(dy) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{H_B(x, dy)}{g(x)} \tag{5}$$

在强收敛下存在，而且对任一球面 S_r，$\mathring{B}_r \supset \bar{B}$，有

$$\mu_B(dy) = \int_{S_r} \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(d\xi) H_B(\xi, dy). \qquad (6)$$

称 μ_B 为 B 的平衡测度．由(6)及轨道的连续性，知 μ_B 集中在 B 的外边界上．此外，μ_B 在任何极集 N 上无质量，此因

$$H_B(x, N) \leqslant P_x(h_N < \infty) = 0,$$

故 $\mu_B(N) = 0$.

称 μ_B 的全质量 $\mu_B(\bar{B})$ 为 B 的容度，记为 $C(B)$.

平衡测度有下列概率意义．由(5)得

$$\mu_B(A) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{P_x(x(h_B) \in A, h_B < \infty)}{g(x)},$$

$$C(B) = \mu_B(\bar{B}) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{P_x(h_B < \infty)}{g(x)}.$$

故对 $A \in \mathscr{B}^n$ 有

$$\lim_{|x| \to \infty} P_x(x(h_B) \in A \mid h_B < \infty) = \frac{\mu_B(A)}{C(B)}. \qquad (7)$$

因此，规范化后的平衡测度，可理解为自无穷远出发，B 的首中点的条件分布．

平衡测度 μ_B 的势 $G\mu_B$ 称为平衡势．

（二）平衡势的概率意义．

定理 2. 设 B 为相对紧集，则

$$G\mu_B(x) = P_x(h_B < \infty), \quad x \in R^n. \qquad (8)$$

注 1．如 $x \in B^r$，则上式右方、因而左方等于 1，可见 $G\mu_B$ 相当于物理中的平衡势（参看 §1，（二））．这也许就是为何称 μ_B 为 B 的平衡测度的原因．

定理 2 之证．1° 由 §6(14)

$$\frac{g(y-x)}{g(y)} = \int_B \frac{H_B(x, dz) g(y-z)}{g(y)} + \frac{g_B(x, y)}{g(y)}. \qquad (9)$$

当 $|y|\to\infty$ 时，$g(y-x)/g(y)$ 在紧集上均匀趋于 1，故

$$1=P_x(h_B<\infty)+\lim_{|y|\to\infty}\frac{g_B(x,y)}{g(y)},$$

即在紧集上均匀地有

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{g_B(x,y)}{g(y)}=P_x(h_B=\infty). \tag{10}$$

利用对称性

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{g_B(x,y)}{g(x)}=P_y(h_B=\infty). \tag{11}$$

设 f 为任意非负有界可测函数，有紧支集 C，则由 §1 引理 2

$$Gf(z)=\int_C g(y-z)f(y)dy$$

是有界函数．由(11)

$$\lim_{|x|\to\infty}\int\frac{g_B(x,y)}{g(x)}f(y)dy=\int P_y(h_B=\infty)f(y)dy. \tag{12}$$

2° 由(5)

$$\begin{aligned}\int_{\bar B}\mu_B(dz)Gf(z)&=\lim_{|x|\to\infty}\int_{\bar B}\frac{H_B(x,dz)Gf(z)}{g(x)}\\&=\lim_{|x|\to\infty}\iint_{\bar B}\frac{H_B(x,dz)g(y-z)f(y)dy}{g(x)}\\&\overset{(9)}{=}\lim_{|x|\to\infty}\left\{\int\left[\frac{g(y-x)}{g(x)}-\frac{g_B(x,y)}{g(x)}\right]f(y)dy\right\}\\&\overset{(12)}{=}\int[1-P_y(h_B=\infty)]f(y)dy\\&=\int P_y(h_B<\infty)f(y)dy.\end{aligned} \tag{13}$$

但另方面，

$$\int_{\bar{B}}\mu_B(dz)Gf(z)=\int\left[\int_{\bar{B}}g(y-z)\mu_B(dz)\right]f(y)dy$$
$$=\int G\mu_B(y)f(y)dy.$$

综合此二方面

$$\int G\mu_B(y)f(y)dy=\int P_y(h_B<\infty)f(y)dy.$$

由 f 的任意性

$$G\mu_B(y)=P_y(h_B<\infty). \quad (L\text{-a.e.}) \tag{14}$$

3° 下证(14)对一切 $y\in R^n$ 成立. 将(14)双方乘以 $p(t, x, y)$ 后对 $y\in R^n$ 积分,得

$$T_tG\mu_B(x)=T_tP_x(h_B<\infty).$$

由§7引理1,左方等于

$$G\mu_B(x)-\int_0^t T_s\mu_B(x)ds\uparrow G\mu_B(x), \quad (t\downarrow 0, \text{一切 } x).$$

右方为

$$T_tP_x(h_B<\infty)=T_tP_x(\text{对某 } s>0, x_s\in B)$$
$$=P_x(\text{对某 } s>t, x_s\in B)\uparrow P_x(h_B<\infty),$$
$$(t\downarrow 0, \text{一切 } x).$$

因此

$$G\mu_B(x)=P_x(h_B<\infty), \quad (x\in R^n)_{\#}$$

系 1. 相对紧集 B 为极集的充要条件是 $C(B)=0$.

证. 如容度 $C(B)=\mu_B(\bar{B})=0$, 由(8)知 $P_x(h_B<\infty)\equiv 0$, 故 B 为极集. 反之, 若 B 为极集, 由(8), $G\mu_B(x)\equiv 0$; 据§7唯一性定理, $C(B)=0_{\#}$

例 1. 考虑球面 S_r, 由(5)(3), S_r 的平衡测度为

$$\mu_{S_r}(dy)=\frac{r^{n-2}}{c_n}U_r(dy)=2\pi^{n/2}r^{n-2}U_r(dy)/\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

$$C(S_r)=2\pi^{n/2}r^{n-2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{n-2}{2r}|S_r|,$$

$$(n\geqslant 3).$$

故 $C(S_r)$ 比面积 $|S_r|$ 低一维. 又由(8)及§4(15),

$$G\mu_{S_r}(x)=P_x(h_{S_r}<\infty)=\begin{cases}1, & \text{如 } |x|\leqslant r;\\ (r/|x|)^{n-2}, & \text{如 } |x|>r.\end{cases}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}P_x(x(h_{S_r})\in A\,|\,h_{S_r}<\infty)=U_r(A),\ (\text{参看}(7)).$$

例 2. 考虑球 B_r 及球层 $B_{a,r}=(x:\ a\leqslant|x|\leqslant r)$. 由于它们的外边界为 S_r, 或者由于

$$P_x(h_{B_r}<\infty)=P_x(h_{B_{a,r}}<\infty)=P_x(h_{S_r}<\infty),$$

由(5)知 B_r, $B_{a,r}$ 与 S_r 有相同的平衡测度、容度及平衡势.

(三) 平衡测度的另一刻画. 对 $B\in\mathscr{B}^n$,以 $\mathscr{M}(B)$ 表如下测度之集:

$$\mathscr{M}(B)=(\mu:\ \text{有穷、非 0 、有紧支集含于 } B, G\mu\leqslant 1). \tag{15}$$

定理 3. 设 B 为紧集,则

$$P_x(h_B<\infty)=\sup_{\mu\in\mathscr{M}(B)}G\mu(x). \tag{16}$$

证. 1° 取一列紧集 $\{B_m\}$, 使

$$B\subset\mathring{B}_m;\ \ B_1\supset\mathring{B}_1\supset B_2\supset\mathring{B}_2\supset\cdots;$$

$$\bigcap_m B_m=\bigcap_m\mathring{B}_m=B.$$

由§6引理1,对 $x\in B^c\cup B^r$, 有 $P_x(h_{B_m}\uparrow h_B)=1$. 试证

$$P_x(h_{B_m}<\infty)\downarrow P_x(h_B<\infty)\quad(L\text{-a. e.}). \tag{17}$$

实际上,取 f 为有紧支集的连续函数,对 $x\in B^c\cup B^r$, 有

$$\lim_{m\to\infty}H_{B_m}f(x)=\lim_{m\to\infty}\int_{\bar{B}_m}H_{B_m}(x,dy)f(y)$$

$$=\lim_{m\to\infty}E_xf(x(h_{B_m}))=\lim_{m\to\infty}E_x[f(x(h_{B_m})),$$

$$h_{B_m} < \infty, h_B < \infty] + \lim_{m\to\infty} E_x[f(x(h_{B_m}),$$
$$h_{B_m} < \infty, h_B = \infty)].$$

由于轨道及 f 的连续性，右方第一极限等于

$$\lim_{m\to\infty} E_x[f(x(h_{B_m}), h_B < \infty]$$
$$= E_x[f(x(h_B); h_B < \infty] = H_B f(x).$$

因为 $f(\infty) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$，故第二极限等于

$$E_x[f(x(h_B)), h_B = \infty] = 0.$$

故得

$$\lim_{m\to\infty} H_{B_m} f(x) = H_B f(x). \tag{18}$$

特别，取 f 连续，有紧支集，在 B_1 上等于 1，即得(17)对一切 $x \in B^i \cup B^r$ 成立。再由 §3 定理 4，(17)对 L-a. e. x 成立。

2° 取 $\mu \in \mathscr{M}(B)$。由 §6(14)

$$G\mu(x) = \int_{B_m} H_{B_m}(x, dz) G\mu(z) + \int g_{B_m}(x, y)\mu(dy). \tag{19}$$

后一积分

$$\int g_{B_m}(x, y)\mu(dy) = \left(\int_B + \int_{B^c}\right) g_{B_m}(x, y)\mu(dy); \tag{20}$$

因 $B \subset \mathring{B}_m$，B 中的点对 B_m 规则，故 $g_{B_m}(x, y) = 0$，$(y \in B)$。又因 μ 之支集为 B，故(20)右方二积分皆为 0。由(19)

$$G\mu(x) = \int_{B_m} H_{B_m}(x, dz) G\mu(z) \leqslant \int_{B_m} H_{B_m}(x, dz)$$
$$= H_{B_m}(x, B_m) = P_x(h_{B_m} < \infty).$$

由此及(17)

$$G\mu(x) \leqslant P_x(h_B < \infty), \quad (L\text{-a. e. } x), \tag{21}$$
$$T_t G\mu(x) \leqslant T_t P_x(h_B < \infty).$$

令 $t \downarrow 0$，即知(21)对一切 $x \in R^n$ 成立。由此及定理 2 即得

证(16)#

注 2. 在势论中已知(见文献[25]): 如 B 是紧集, 则存在唯一测度 γ_B, 其支集为 B,而且

$$G\gamma_B = \sup_{\mu\in\mathscr{M}(B)} G\mu \tag{22}$$

通常称 γ_B 为容量测度. 由定理 2, 3, 立得

$$G\mu_B = G\gamma_B. \tag{23}$$

再由 § 7 唯一性定理,有 $\mu_B = \gamma_B$. 因此, 对紧集 B,平衡测度即是容量测度.

系 2. 设 B 紧,则对任意 $\mu\in\mathscr{M}(B)$, 有

$$\mu(R^n)\leqslant C(B). \tag{24}$$

证. 由(16)(8)

$$\int_B \frac{g(y-x)}{g(x)}\,\mu(dy)\leqslant\int_B \frac{g(y-x)}{g(x)}\,\mu_B(dy).$$

由于在紧集上,均匀地有 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{g(y-x)}{g(x)}=1$, 故在上式中令 $|x|\to\infty$, 即得

$$\mu(R^n)=\mu(\bar B)\leqslant\mu_B(\bar B)=C(B)_\#$$

系 3. 对开集 B,(16)式也成立.

证. 取一列紧集 $\{K_m\}$,使

$$K_m\subset B,\ K_1\subset K_2\subset\cdots,\ \bigcup_m K_m=B.$$

由于 $x_t\in B$ 等价于对一切充分大的 m, $x_t\in K_m$, 故

$$P_x(h_{K_m}\downarrow h_B)=1,\quad (x\in R^n), \tag{25}$$

$$\chi(h_{K_m}<\infty)\uparrow\chi(h_B<\infty),\quad (P_x\text{-a.e.}),$$

χ_A 表 A 的示性函数. 将此式双方对 $P_x(dw)$ 积分,由单调收敛定理得

$$P_x(h_{K_m}<\infty)\uparrow P_x(h_B<\infty). \tag{26}$$

由定理 2，$G\mu_{K_m}(x)\uparrow P_x(h_B<\infty)$. 既然 $\mu_{K_m}\in\mathscr{M}(B)$，故

$$P_x(h_B<\infty)\leqslant\sup_{\mu\in\mathscr{M}(B)}G\mu(x). \tag{27}$$

另方面，如 $\mu\in\mathscr{M}(B)$，μ 有紧支集 K，由(16)(用于 $\mu(K)$)及(8)得

$$\begin{aligned}G\mu(x)&\leqslant G\mu_K(x)=P_x(h_K<\infty)\\&\leqslant P_x(h_B<\infty).\end{aligned} \tag{28}$$

由(27)(28)即得(16)对开集 B 成立#

§9. 容　度

(一) 性质. 在§8中，已对相对紧集 B 定义了容度 $C(B)=\mu_B(\bar{B})$，故 $C(B)$ 是全体相对紧集类上的集合函数. 由§8(5)(6)

$$C(B)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(h_B<\infty)}{g(x)}=\int_{S_r}DP_\xi(h_B<\infty)U_r(d\xi), \tag{1}$$

其中 $D>0$ 为某常数，S_r 为 $\mathring{B}_r\supset B$ 之球面. 此式把 $C(B)$ 与 $P_x(h_B<\infty)$ 联系起来，故可通过 $P_x(h_B<\infty)$ 来研究 $C(B)$.

首先注意，如 $N\subset M$，则 $h_N\geqslant h_M$，又

$$h_{A\cap B}\geqslant h_A\vee h_B;\quad h_{A\cup B}=h_A\wedge h_B. \tag{2}$$

简记 $(h_A<\infty)$ 为 H_A.

(i) 如 $A\subset B$，则 $C(A)\leqslant C(B)$. 此因 $P_x(H_A)\leqslant P_x(H_B)$.

(ii) $C(A\cup B)\leqslant C(A)+C(B)-C(A\cap B)$

实际上，利用(2)及 $H_A\cup H_B=H_{A\cup B}$，得

$$\begin{aligned}P_x(H_{A\cap B})\leqslant P_x(H_AH_B)&=P_x(H_A)+P_x(H_B)\\&-P_x(H_{A\cup B}).\end{aligned}$$

(iii) 设点 $a\in R^n$，令 $A+a=(x+a: x\in A)$，则

$$C(A+a)=C(A).$$

此因 $P_x(H_A)=P_{x+a}(H_{A+a})$，又 $g(x)=c_n|x|^{2-n}$，故

$$C(A+a)=\lim_{|x+a|\to\infty}\frac{P_{x+a}(H_{A+a})}{g(x+a)}$$

$$=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_A)}{g(x)}=C(A).$$

(iv) $C(-A)=C(A)$.

此因 $P_x(H_A)=P_{-x}(H_{-A})$，由 $g(x)=g(-x)$

$$C(A)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_A)}{g(x)}=\lim_{|-x|\to\infty}\frac{P_{-x}(H_{-A})}{g(-x)}=C(-A).$$

(v) 设 $a>0$ 为常数，则 $C(aA)=a^{n-2}C(A)$.

实际上，由尺度不变性，对 $a>0$ 有

$$P_x\left(\frac{x(a^2t)}{a}\in B\right)=P_{\frac{x}{a}}(x(t)\in B),$$

或

$$P_{ax}\left(\frac{x(a^2t)}{a}\in B\right)=P_x(x(t)\in B),$$

故

$$P_{ax}(H_{aB})=P_{ax}\left(存在\ s>0,\ \frac{x(s)}{a}\in B\right)$$

$$=P_{ax}\left(存在\ t>0,\ \frac{x(a^2t)}{a}\in B\right)$$

$$=P_x(存在\ t>0,\ x(t)\in B)=P_x(H_B).$$

于是

$$C(aA)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_{aA})}{g(x)}=\lim_{|ax|\to\infty}\frac{P_{ax}(H_{aA})}{g(ax)}$$

$$=\lim_{|x|\to\infty}\frac{a^{n-2}P_{ax}(H_{aA})}{g(x)}=a^{n-2}\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_x(H_A)}{g(x)}$$

$$= a^{n-2}C(A).$$

(vi) 如 B 为相对紧开集，则

$$C(B) = \sup\{C(K): K \subset B, K \text{紧}\}. \tag{3}$$

实际上，令 $K_m \subset B$，K_m 紧，$K_1 \subset K_2 \subset \cdots$，$\bigcup_m K_m = B$. 则由 § 8(26)

$$P_x(H_{K_m}) \uparrow P_x(H_B).$$

由此即可推知 $C(K_m) \uparrow C(B)$，从而(3)成立. 为证此，令 D 为相对紧开集，$D \supset \bar{B}$. 显然 $P_x(H_D) = 1$，$x \in K_m$. 由于 μ_{K_m} 的支集含于 K_m，故

$$\begin{aligned}
C(K_m) &= \int_{K_m} P_x(H_D)\mu_{K_m}(dx) = \int_{K_m} G\mu_D(x)\mu_{K_m}(dx) \\
&= \int_{K_m}\int_{\bar{D}} g(y-x)\mu_D(dy)\mu_{K_m}(dx) \\
&= \int_{\bar{D}} G\mu_{K_m}(y)\mu_D(dy) = \int_{\bar{D}} P_y(H_{K_m})\mu_D(dy) \\
&\uparrow \int_{\bar{D}} P_y(H_B)\mu_D(dy) = C(B).
\end{aligned}$$

(vii) 如 B 紧，则

$$C(B) = \inf\,(C(U): U \supset B, U \text{开}, \bar{U} \text{紧}). \tag{4}$$

实际上，取 U_m 为相对紧开集，

$$U_1 \supset \bar{U}_2 \supset U_2 \supset \cdots; \quad \bigcap_m U_m = \bigcap_m \bar{U}_m = B.$$

取 r 充分大，使 $\mathring{B}_r \supset \bar{U}_1$，则对 $\xi \in S_r$，有

$$P_\xi(H_{U_m}) \downarrow P_\xi(H_B),$$

(参看 § 8 (17)). 由(1)得

$$\begin{aligned}
C(U_m) &= \int_{S_r} DP_\xi(H_{U_m})U_r(d\xi) \\
&\downarrow \int_{S_r} DP_\xi(H_B)U_r(d\xi) = C(B).
\end{aligned}$$

（二）至此我们只对相对紧集定义了容度，现在希望把它的定义域扩大到一切 Borel 集上去． 为此，需利用 Choquet 容度理论．

设 E 为局部紧的可分距离空间， K 是 E 中一切紧子集的类．定义在 K 上的实值集函数 φ 称为 Choquet 容度，如果

(a) 若 $A\in K$, $B\in K$, $A\subset B$, 则 $\varphi(A)\leqslant\varphi(B)$;

(b) 对一切 $A\in K$, $B\in K$, 有

$$\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)\leqslant\varphi(A)+\varphi(B);$$

(c) 设 $A\in K$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $U\supset A$, 使对任意 $B\in K$, $A\subset B\subset U$, 有

$$\varphi(B)-\varphi(A)<\varepsilon.$$

利用已给的 $\varphi(A)$, $A\in K$, 可以对 E 的任意子集 A 定义内容度 $\varphi_*(A)$ 及外容度 $\varphi^*(A)$:

$$\varphi_*(A)=\sup\{\varphi(B):B\in K,\ B\subset A\},\tag{5}$$

$$\varphi^*(A)=\inf\{\varphi_*(U):U\text{ 为开集},\ A\subset U\}.\tag{6}$$

如对某 $A\subset E$, 有

$$\varphi_*(A)=\varphi^*(A),\tag{7}$$

则称 A 为可容的，并以此公共值作为 A 的 Choquet 容度，记为 $\tilde{C}(A)(=\varphi^*(A))$. 由 (c)，紧集 B 是可容的，而且 $\tilde{C}(B)=C(B)$.

Choquet 容度扩张定理． 每一 Borel 集可容．

此定理之证可见文献[1;24]．所谓 Borel 集类是指含一切开集的最小 σ 代数．其实不仅 Borel 集，更一般的解析集也是可容的．利用此定理可证明对相当广泛的过程，解析集的首中时是马氏时间．还可证明：如 A_n, A 可容，$A_n\uparrow A$, 则 $\tilde{C}(A_n)\uparrow\tilde{C}(A)$.

现在回到 § 8 (一)中所定义的容度 $C(B)$, B 为相对紧集．当限制在 K 上考虑 $C(B)$ 时，由 (i) (ii) (vi) (vii) 知它

是一 Choquet 容度．根据扩张定理，可把它的定义域扩大到一切 Borel 集上而得 $\tilde{C}(B)$.

今证如 B 为相对紧集，则 $\tilde{C}(B)=C(B)$；因而新定义与原定义在相对紧集上一致．一方面

$$\tilde{C}(B)=\sup\{C(A): A\in K,\ A\subset B\}\leqslant C(B);$$

另方面，如 U 为相对紧开集，则由 (vi) 及(5)，$\tilde{C}(U)=C(U)$，故对相对紧集 B，

$$\begin{aligned}\tilde{C}(B)&=\inf\{\tilde{C}(U): U \text{ 为相对紧开集},\ U\supset B\}\\&=\inf\{C(U): U \text{ 为相对紧开集},\ U\supset B\}\geqslant C(B),\end{aligned}$$

从而 $\tilde{C}(B)=C(B)$.

注 1．对具体的 B，要求出它的容度并非容易．因为由(1)，这相当于要求出 $P_\xi(H_B)$．有时可以利用逼近定理：如 $B_m\in\mathscr{B}^n$，$B_m\uparrow B$，B 有界，则 $C(B_m)\uparrow C(B)$；或者 B_m 紧，$B_m\downarrow B$，则 $C(B_m)\downarrow C(B)$．对有些集，可以找到容度的估值．例如(见[17])，设

$$C_L=\left(x: 0\leqslant x_1<L,\ \sum_{i=2}^{n} x_i^2\leqslant 1\right),\ L>0.$$

它是底为 $n-1$ 维单位球高为 L 的圆柱．则对 $L_0>0$，存在常数 M 及 N，使

$$ML\leqslant C(C_L)\leqslant NL,\quad (L>L_0, n>3);$$

$$ML/\log L\leqslant C(C_L)\leqslant NL/\log L,\quad (L>L_0, n=3).$$

§ 10. 暂留集的平衡测度

(一) 在 § 8 中，对相对紧集定义了平衡测度，并证明了两个重要的结果，即(8)与(16)． 本节将推广这些结果到某些无界集上，即 § 6 中所定义的暂留集上，它们依赖于布朗运动本身． 相对紧集都是暂留集 ($n\geqslant 3$ 时)． 回忆暂留集

$B(\in\mathscr{B}^n)$ 的定义是：对一切 x，有

$$\lim_{t\to\infty}P_x(x_s\in B,\ \text{对某 } s>t)=0. \qquad (1)$$

称 $\mathscr{B}^n$ 上的任一测度 μ 为 Radon 测度，如对任一紧集 K，有 $\mu(K)<\infty$.

设 $\mu_n(n\geqslant 1)$ 及 μ 皆为 Radon 测度，称 μ_n 淡收敛于 μ (converges vaguely)，如对任一有紧支集的连续函数 φ，有

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi d\mu_n=\int\varphi d\mu. \qquad (2)$$

淡收敛记为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$，$\left(\int=\int_{R^n}\right)$.

设 $\mu_n(n\geqslant 1)$ 为一列 Radon 测度，如对每紧集 K，有 $\sup\limits_n\mu_n(K)<\infty$，则必存在一列严格上升的整数 $\{n_j\}$ 及 Radon 测度 μ，使 $\mu_{n_j}\xrightarrow{v}\mu$.

定理 1. 设 B 为暂留集. 则

i) 存在唯一 Radon 测度 μ_B，其支集含于 ∂B，使

$$G\mu_B(x)=P_x(h_B<\infty); \qquad (3)$$

ii) 如 $B_m(m\geqslant 1)$ 是任一列相对紧集，满足

$$B_1\subset B_2\subset\cdots;\quad \bigcup_m B_m=B,$$

则当 $m\to\infty$ 时，有

$$G\mu_{B_m}\uparrow G\mu_B;\quad \mu_{B_m}\xrightarrow{v}\mu_B.$$

证. 1° 设 $\{B_m\}$ 满足定理条件，则

$$\bigcup_m(h_{B_m}<\infty)=(h_B<\infty);$$

$$P_x(h_{B_m}<\infty)\uparrow P_x(h_B<\infty).$$

由 § 8(8)，

$$G\mu_{B_m}(x)=P_x(h_{B_m}<\infty)\leqslant P_x(h_B<\infty)\overset{(\text{设})}{=}\varphi_B(x). \qquad (4)$$

设K为任一紧集，因 $\inf\limits_{y\in K} g(y-x)=c(x)>0$，由上式得

$$P_x(h_B<\infty)\geqslant\int_K g(y-x)\mu_{B_m}(dy)\geqslant c(x)\mu_{B_m}(K).$$

故 $\sup\limits_m \mu_{B_m}(K)<\infty$. 根据上述，存在子列 $\mu_{B'_m}\xrightarrow{v}\mu_B$. 其中 μ_B 为某 Radon 测度.

2° 设 $f\geqslant 0$ 连续，有紧支集. 由§1引理4，Gf 有界连续. 以 B_r 表半径为 r，中心为0的闭球，当 Gf 限制在 B_r 上时，由 $\mu_{B'_m}\xrightarrow{v}\mu_B$ 得

$$\begin{aligned}A&\overset{(设)}{=}\lim_{r\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\int_{B_r}Gf(x)\mu_{B'_m}(dx)\right]\\&=\lim_{r\to\infty}\int_{B_r}Gf(x)\mu_B(dx)=\int Gf(x)\mu_B(dx)\\&=\int G\mu_B(x)f(x)dx.\end{aligned}\tag{5}$$

再由 $G\mu_{B'_m}\uparrow\varphi_B$ 得

$$\begin{aligned}B&\overset{(设)}{=}\lim_{m\to\infty}\int Gf(x)\mu_{B'_m}(dx)=\lim_{m\to\infty}\int G\mu_{B'_m}(x)f(x)dx\\&=\int\varphi_B(x)f(x)dx.\end{aligned}\tag{6}$$

利用最后将证明的一个结果：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $r_0>0$，使当 $r\geqslant r_0$ 时，有

$$\sup_m\int_{B_r^c}\mu_{B'_m}(dx)Gf(x)<\varepsilon;\tag{7}$$

容易看出，当 r 充分大时，A 与 B 之值皆在

$$\lim_{m\to\infty}\int Gf(x)\mu_{B'_m}(dx)\pm\varepsilon$$

之间，从而 $A=B$，于是(5)，(6)之右方值也相等而有

$$\int G\mu_B(x)f(x)dx=\int\varphi_B(x)f(x)dx.$$

由 f 的任意性得

$$G\mu_B(x) = \varphi_B(x), \qquad \text{(a. e.)}$$

利用 § 8 定理 2 中的同样证法，即知上式对一切 x 成立．此得证(3)及 ii) 中第一结论．

3° 若 $\{\mu_{B''_m}\}$ 为$\{\mu_{B_m}\}$的另一淡收敛于某测度 μ'_B 的另一子列，则同样推理可得 $G\mu'_B(x)=\varphi_B(x)=G\mu_B(x)$．由唯一性定理(§ 7．定理 1)即得 $\mu'_B=\mu_B$，因而 $\mu_{B_m}\xrightarrow{v}\mu_B$． 唯一性定理还表明 μ_B 是唯一的有势为 φ_B 的测度．下证支集$\angle\mu_B\subset\partial B$． 取球列 $\{B_m\}$． 令 $C_m=B\cap B_m$，则 $C_1\subset C_2\subset\cdots$，$\bigcup\limits_m C_m=B$．于是 $\mu_{C_m}\xrightarrow{v}\mu_B$． 但$\angle\mu_{C_m}\subset\partial C_m$，而且 B 之每一内点必为 C_m (m 充分大)的内点，故 $\angle\mu_B\subset\partial B$．

4° 剩下要证(7)． 若 $x\in B_r^c$，则 $H_{B_r^c}(x, dy)$ 集中在点 x 上，故

$$\int_{B_r^c}\mu_{B'_m}(dx)\,Gf(x) = \int_{B_r^c}\mu_{B'_m}(dx)H_{B_r^c}Gf(x)$$

$$\leqslant\int\mu_{B'_m}(dx)H_{B_r^c}\,Gf(x). \tag{8}$$

在 § 6(13)中令 $\lambda\to 0$，得

$$\int H_{B_r^c}(x,dz)g(y-z)=\int H_{B_r^c}(y,dz)g(x-z).$$

由此及(4)得

$$\int\mu_{B'_m}(dx)H_{B_r^c}\,Gf(x)$$

$$=\iiint\mu_{B'_m}(dx)\,H_{B_r^c}(x,dz)g(y-z)f(y)dy$$

$$=\iiint\mu_{B'_m}(dx)f(y)dyH_{B_r^c}(y,dz)g(x-z)$$

$$=\int H_{B_r^c}\,G\mu_{B'_m}(y)f(y)dy$$

$$\leqslant \int H_{B_r^c} \varphi_B(y) f(y) dy.$$

联合(8)即得

$$\int_{B_r^c} Gf(x) \mu_{B'_m}(dx) \leqslant \int H_{B_r^c} \varphi_B(y) f(y) dy. \qquad (9)$$

简写 $h_{B_r^c}$ 为 h. 注意 $\varphi_B \leqslant 1$; 对 $t > 0$, 有

$$H_{B_r^c} \varphi_B(y) = E_y[\varphi_B(x(h))] = E_y[\varphi_B(x(h)), h \leqslant t]$$
$$+ E_y[\varphi_B(x(h)), h > t] \leqslant P_y(h \leqslant t) + T_t \varphi_B(y). \qquad (10)$$

因 B 为暂留集,故

$$T_t \varphi_B(y) = P_y(x(s) \in B,\ 对某\ s > t) \downarrow 0,\ (t \to \infty).$$

又因 $P_y(\lim\limits_{r \to \infty} h = \infty) = 1$, 故 $\lim\limits_{r \to \infty} P_y(h \leqslant t) = 0$, 于是由(10), $\lim\limits_{r \to \infty} H_{B_r^c} \varphi_B(y) = 0$. 既然 f 有紧支集,由控制收敛定理,当 r 充分大时, (9)式右方积分小于任意给定的 $\varepsilon > 0$; 于是左方对一切 m 也如此,此得证(7)#

我们称定理 1 中的 μ_B 为 B 的平衡测度, 其势称为平衡势.

(二) 在 § 9 中,对任一 Borel 集 B, 定义了容度 $\tilde{C}(B)$, 它是由相对紧集的容度经扩张后而来的. 自然要问: 当 B 为暂留集时,其平衡测度的全部质量 $\mu_B(R^n)$ 是否等于 $\tilde{C}(B)$? 为此,需要下列引理.

引理 1. 设 B 为暂留集,又 $A \subset B$, 则

$$\mu_A(R^n) \leqslant \mu_B(R^n). \qquad (11)$$

证. 以 $\{D_m\}$ 表一列上升的相对紧集, 其和为 R^n. 由定理 1 得

$$\int \mu_A(dx) G\mu_{D_m}(x) = \int \mu_{D_m}(dx) G\mu_A(x)$$
$$= \int \mu_{D_m}(dx) P_x(h_A < \infty) \leqslant \int \mu_{D_m}(dx) P_x(h_B < \infty)$$

$$= \int \mu_{D_m}(dx) G\mu_B(x) = \int \mu_B(dx) G\mu_{D_m}(x).$$

由于

$$G\mu_{D_m}(x) = P_x(h_{D_m} < \infty) \uparrow 1,$$

故由单调收敛定理得证(11)#

定理 2. 设 B 为暂留集，

i) 如 $\{B_m\}$ 为相对紧集列，$B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, $\bigcup_m B_m = B$, 则 $C(B_m) \uparrow \tilde{C}(B)$;

ii) $\tilde{C}(B) = \mu_B(R^n)$.

证. 1° 由 $C(B_m) = \mu_{B_m}(R^n)$ 及(11),得

$$C(B_1) \leqslant C(B_2) \leqslant \cdots \leqslant \mu_B(R^n). \tag{12}$$

以 $f_r\ (r \geqslant 1)$ 表有紧支集的连续函数. $0 \leqslant f_r \leqslant 1$, $f_r \uparrow 1$, $(r \to \infty)$, 有

$$C(B_m) \geqslant \int f_r(x) \mu_{B_m}(dx).$$

既然 $\mu_{B_m} \xrightarrow{v} \mu_B$, 得 $\lim\limits_{m\to\infty} C(B_m) \geqslant \int f_r(x)\mu_B(dx)$. 再令 $r \to \infty$, 有 $\lim\limits_{m\to\infty} C(B_m) \geqslant \mu_B(R^n)$. 结合(12)得

$$C(B_m) \uparrow \mu_B(R^n). \tag{13}$$

2° 下面分两种情况. 先设 $\mu_B(R^n) = \infty$, 对任意 $N > 0$, 必有 m 使 $C(B_m) \geqslant 2N$. 由于

$$C(B_m) = \sup\{C(K): K \subset B_m, K\ 紧\}, \tag{14}$$

故必有紧集 $K \subset B_m \subset B$ 使 $C(K) > N$; 从而

$$\tilde{C}(B) = \sup\{C(K): K \subset B, K\ 紧\} = \infty = \mu_B(R^n).$$

次设 $\mu_B(R^n) < \infty$. 对 $\varepsilon > 0$, 存在 m 使 $C(B_m) \geqslant \mu_B(R^n) - \varepsilon$. 由(14),有紧集 $K \subset B_m \subset B$, 使

$$C(K) \geqslant C(B_m) - \varepsilon \geqslant \mu_B(R^n) - 2\varepsilon.$$

故 $\tilde{C}(B) \geqslant \mu_B(R^n)$. 联合(13)即得 $\tilde{C}(B) = \mu_B(R^n)$#

(三) 现在来推广§8(16)，它是概率论与势论间的一重要联系.

定理 3. 设 B 为闭集，则

$$P_x(h_B<\infty)=\sup_{\mu\in\mathscr{M}(B)} G\mu(x). \tag{15}$$

证. 因 B 闭，可以找到紧集 $B_n\subset B$， $B_1\subset B_2\subset\cdots$， $\bigcup_n B_n=B$. 由§8定理2

$$G\mu_{B_n}(x)=P_x(h_{B_n}<\infty)\uparrow P_x(h_B<\infty), \quad (n\to\infty). \tag{16}$$

另方面，设 $\mu\in\mathscr{M}(B)$，其紧支集含于 B_n. 由§8(22),(23)

$$G\mu(x)\leqslant G\mu_{B_n}(x)=P_x(h_{B_n}<\infty)\leqslant P_x(h_B<\infty).$$

由此及(16)即得(15)#

系 1. 闭集 B 为暂留集的充要条件是：存在 Radon 测度 μ_B，其支集含于 ∂B，使

$$G\mu_B(x)=\sup\{G\mu(x):\mu\in\mathscr{M}(B)\}. \tag{17}$$

证. 必要：由定理 1 与 3 得

$$G\mu_B(x)=P_x(h_B<\infty)=\sup\{G\mu(x):\mu\in\mathscr{M}(B)\}.$$

充分：由(17)及定理 3

$$G\mu_B(x)=\sup\{G\mu(x):\mu\in\mathscr{M}(B)\}=P_x(h_B<\infty),$$

$$T_tG\mu_B(x)=T_tP_x(h_B<\infty)=P_x(x_s\in B,\ 对某\ s>t).$$

令 $t\to\infty$，仿§8 定理 2 之证，知左方趋于 0. 故 B 暂留#

对暂留集 B 称定理 1 中的 μ_B 为 B 的平衡测度，已证明 $\angle\mu_B\subset\partial B$，$\mu_B(R^n)=\tilde{C}(B)$，故它与容度的扩张理论是相容的.

§11. 极 集

(一) **λ-势.** 本节讨论集为极集的条件. 回忆集 $B\in\mathscr{B}^n$

称为极集，如 $P_x(h_B < \infty) = 0$. 以下会看到，这些条件可以通过容度、规则点或势来表达. 对 $\lambda > 0$，令

$$H_B^\lambda(x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_x(h_B \in dt, x(h_B) \in A), \qquad (1)$$

$$\mu_B^\lambda(A) = \lambda \int H_B^\lambda(x, A) dx. \qquad (2)$$

下引理表明：$E_x e^{-\lambda h_B}$ 是 μ_B^λ 的 λ-势. 即

引理 1. 对任意 $B \in \mathscr{B}^n$，有

$$E_x e^{-\lambda h_B} = \int g^\lambda(y - x) \mu_B^\lambda(dy) \ (= G^\lambda \mu_B^\lambda(x)). \qquad (3)$$

证. 将 § 6(12)双方对 $x \in R^n$ 积分，并利用

$$\int g^\lambda(x) dx = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int p(t, x) dx dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda \qquad (4)$$

得

$$1 = \int_B \mu_B^\lambda(dz) g^\lambda(y - z) + \lambda \int g_B^\lambda(x, y) dx. \qquad (5)$$

由 g_B^λ 的对称性及 § 6(7)

$$\int g_B^\lambda(x, y) dx = \int g_B^\lambda(y, x) dx$$

$$= E_y \int_0^{h_B} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} [1 - E_y e^{-\lambda h_B}]. \qquad (6)$$

代入(5)并利用 g^λ 的对称性即得(3)#

系 1. 设 $n \geqslant 2$，可列点集为极集.

证. 利用 $P_x(h_{\bigcup_m A_m} < \infty) \leqslant \sum_m P_x(h_{A_m} < \infty)$ 知，可列多个极集的和为极集. 故只要证单点集为极集. 在 (3) 中取 $B = \{a\}$，得

$$E_x e^{-\lambda h_a} = g^\lambda(a - x) \mu_a^\lambda(a), \quad (a = \{a\}). \qquad (7)$$

令 $x\to a$，左方界于0与1之间，而由 $n\geqslant 2$，$\lim\limits_{x\to a}g^\lambda(a-x)=g^\lambda(0)=\infty$，故必 $\mu_a^\lambda(a)=0$．于是 $E_xe^{-\lambda h_a}=0$，从而 $P_x(h_a<\infty)=0$#

注意，μ_B^λ 集中在 $\bar{B}$ 上，又 $g^\lambda(x)$ 当 x 在紧集上变动时，下界大于0．故由(3)知，如 $\bar{B}$ 紧，则 $\mu_B^\lambda(\bar{B})<\infty$．令

$$C^\lambda(B)=\mu_B^\lambda(\bar{B}). \tag{8}$$

引理2． 设 B 与 B_m 皆紧，又

$$B_1\supset\mathring{B}_1\supset B_2\supset\mathring{B}_2\supset\cdots,\quad \bigcap_m\mathring{B}_m=\bigcap_m B_m=B.$$

则有

$$\lim_{m\to\infty}C^\lambda(B_m)=C^\lambda(B). \tag{9}$$

证．将(3)双方对 $x\in R^n$ 积分，利用(4)

$$\int E_xe^{-\lambda h_B}dx=\iint g^\lambda(y-x)dx\mu_B^\lambda(dy)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int\mu_B^\lambda(dy)=\frac{1}{\lambda}\mu_B^\lambda(\bar{B})=\frac{1}{\lambda}C^\lambda(B),$$

故得

$$C^\lambda(B)=\lambda\int E_xe^{-\lambda h_B}dx,\quad C^\lambda(B_m)=\lambda\int E_xe^{-\lambda h_{B_m}}dx. \tag{10}$$

故由§6引理1及§3定理4

$$E_xe^{-\lambda h_{B_m}}\downarrow E_xe^{-\lambda h_B}\quad(L\text{-a. e. }x).$$

由此及(10)即得(9)#

(二) 充要条件．

定理1． 设 K 为紧集，又 $\sup\limits_x E_xe^{-\lambda h_K}=\beta<1$，则 K 为极集．

证．取一列紧集 $K_m\supset K$，使

$$K_1 \supset \mathring{K}_1 \supset K_2 \supset \mathring{K}_2 \supset \cdots, \quad \bigcap_m K_m = \bigcap_m \mathring{K}_m = K.$$

由 $y \in K \subset \mathring{K}_m \subset K_m^r$，得

$$E_y e^{-\lambda h_{K_m}} = 1. \tag{11}$$

一方面

$$\iint g^\lambda(y-x)\mu_K^\lambda(dy)\mu_{K_m}^\lambda(dx)$$

$$= \int_{K_m} (E_x e^{-\lambda h_K})\mu_{K_m}^\lambda(dx) \leqslant \beta C^\lambda(K_m).$$

另方面，由(11)

$$\iint g^\lambda(y-x)\mu_K^\lambda(dy)\mu_{K_m}^\lambda(dx)$$

$$= \int_K (E_y e^{-\lambda h_{K_m}})\mu_K^\lambda(dy) = C^\lambda(K).$$

由此及引理 2

$$C^\lambda(K) \leqslant \beta C^\lambda(K_m) \downarrow \beta C^\lambda(K).$$

故 $C^\lambda(K) = 0$. 由(3)，$E_x e^{-\lambda h_K} = 0$；$P_x(h_K < \infty) = 0$。#

在§3中，我们称可测集 B 为疏集，如 $B^r = \varnothing$（空集）. 直观地说，疏集是自任一点都不能立刻命中的集. 下定理表示：如一紧集自任一点都不能立刻击中，那么它自任一点都永远不能击中.

定理 2. 设 A 紧，则 A 为极集的充要条件是它为疏集.

证. 必要：由 $P_x(h_A = 0) \leqslant P_x(h_A < \infty)$ 知极集必疏。

充分：1° 先证 $E_x e^{-\lambda h_A}$ 对 x 下连续. 由§3定理3，$P_x(h_A \leqslant t)$ 下连续. 由 Fatou 引理及分部积分，得

$$\varliminf_{x\to a} E_x e^{-\lambda h_A} = \varliminf_{x\to a} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dP_x(h_A \leqslant t)$$

$$\geqslant \varliminf_{x\to a} \lambda \int_0^\infty P_x(h_A \leqslant t) e^{-\lambda t} dt$$

$$\geqslant \lambda \int_0^\infty \varliminf_{x \to a} P_x(h_A \leqslant t) e^{-\lambda t} dt$$

$$\geqslant \lambda \int_0^\infty P_a(h_A \leqslant t) e^{-\lambda t} dt = E_a e^{-\lambda h_A}.$$

2° 令 $A_m = \left(x: E_x e^{-\lambda h_A} \leqslant 1 - \frac{1}{m}\right) \cap A \subset A$；由 1° 知 A_m 紧．根据引理 1，对 $x \in A_m$，有

$$G^\lambda \mu^\lambda_{A_m}(x) = E_x e^{-\lambda h_{A_m}} \leqslant E_x e^{-\lambda h_A} \leqslant 1 - \frac{1}{m}.$$

由 § 7 极大原理（定理 2′），上式对一切 $x \in R^n$ 成立．由定理 1 知 A_m 为极集．因 $A^r = \varnothing$，故 $A = \bigcup_m A_m$ 也是极集▮

定理 3. 如 B 紧，则 $B \cap (B^r)^c$ 为极集．

证．注意如 $N \supset M$，$x \bar{\in} N^r$，则显然 $x \bar{\in} M^r$．对正整数 m，令

$$B_m = B \cap \left(x: E_x e^{-\lambda h_B} \leqslant 1 - \frac{1}{m}\right) = B \cap D_m.$$

任取 $x \in R^n$．或者 $x \bar{\in} B^r$，由上述事实知 $x \bar{\in} B_m^r$．或者 $x \in B^r$，因之 $P_x(h_B = 0) = 1$ 而 $x \bar{\in} D_m$．既然 $E_x e^{-\lambda h_B}$ 对 x 下连续，D_m 闭，故 $x \bar{\in} D_m^r$．再利用上事实，$x \bar{\in} B_m^r$．于是得知 $B_m^r = \varnothing$．由定理 2，B_m 为极集．从而

$$B \cap (B^r)^c = \bigcup_m B_m$$

也是极集▮

定理 4. 设 $B \in \mathscr{B}^n$，$(n \geqslant 3)$，则 B 为极集的充要条件是下二者之一：

(i) B 的任一紧子集为极集；

(ii) 容度 $\widetilde{C}(B) = 0$.

证. (i) 必要性显然. 反之,设紧子集 $K\subset B$ 为极集,由 §8 系 1, $C(K)=0$. 于是对 B 的任意相对紧子集 A,有

$$C(A)=\widetilde{C}(A)=\sup\{C(K):\ K\subset A,\ K\text{紧}\}=0.$$

再由 §8 系 1, A 为极集. 特别, $B\cap B_m$ 为极集,其中 $B_m=(x:\ |x|\leqslant m)$. 由 $B=\bigcup\limits_m (B\cap B_m)$ 知 B 为极集.

(ii) 若 B 为极集,则其紧子集为极集. 由 §8 系 1

$$\widetilde{C}(B)=\sup\{C(K):\ K\subset B,\ K\text{紧}\}=0.$$

反之,如 $\widetilde{C}(B)=0$, 则对其任意紧子集 K, 有 $C(K)=0$, 故 K 为极集. 由 (i) 即知 B 为极集#

回忆 §8 (三)中 $\mathscr{M}(B)$ 的定义,

定理 5. 设 $B\in\mathscr{B}^n$, ($n\geqslant 3$), 则 B 为极集的充要条件是 $\mathscr{M}(B)=\varnothing$; 或等价地,对任意测度 μ, 其支集 $K\subset B$, $0<\mu(B)<\infty$, 有 $\sup\limits_x G\mu(x)=\infty$.

证. 只需证后一结论. 设有如上之 μ,使 $\sup\limits_x G\mu(x)\leqslant M<\infty$, 则 $\frac{\mu}{M}\in\mathscr{M}(K)\subset\mathscr{M}(B)$. 显然,由 §8(16),

$$P_x(h_B<\infty)\geqslant P_x(h_K<\infty)\geqslant G\mu(x)/M.$$

因 μ 非 0,由 §7 唯一性定理,至少有一 x,使 $G\mu(x)>0$. 对此 x, $P_x(h_B<\infty)>0$,故 B 非极集.

反之,如 B 非极集,由定理 4(i), B 必有某紧子集 K,它非极集,即 $P_x(h_K<\infty)>0$ 对某 x 成立. 考虑 K 的平衡测度 μ_K, 由 §8 定理 2

$$0<P_x(h_K<\infty)=G\mu_K(x)\leqslant 1.$$

故 μ_K 使 $\sup\limits_x G\mu_K(x)=\infty$ 不成立#

§ 12. 末 遇 分 布

(一) 末遇时与末遇点. 对 $B \in \mathscr{B}^n$, $n \geqslant 3$, 定义B的末遇时为

$$l_B(\omega) = \begin{cases} \sup(t > 0, \ x_t(\omega) \in B), & \text{如右集非空,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \tag{1}$$

并称 $x(l_B)$ 为B的末遇点. 由于

$$(l_B > t) = (\theta_t h_B < \infty), \tag{2}$$

故 l_B 是一随机变量.

本节中,设B为暂留集, μ_B 表 § 10 定理 1 中的 Radon 测度. 当B为相对紧集时, μ_B 即B的平衡测度.

定理 1. 自 $x \in R^n$ 出发, l_B的分布在$(0, \infty)$绝对连续,而且有密度为

$$\int p(t, x, z)\mu_B(dz), \ (t > 0).$$

证. 由(1)及 § 10 定理 1

$$\begin{aligned} P_x(l_B > t) &= P_x(\theta_t h_B < \infty) = E_x P_{x(t)}(h_B < \infty) \\ &= \int p(t, x, y) P_y(h_B < \infty) dy \\ &= \int p(t, x, y) G\mu_B(y) dy \\ &= \int p(t, x, y) \int g(y, z)\mu_B(dz) dy \\ &= \int p(t, x, y) \int\int_0^\infty p(s, y, z) ds \mu_B(dz) dy \\ &= \int_0^\infty \int p(s + t, x, z)\mu_B(dz) ds \\ &= \int_t^\infty [\int p(s, x, z)\mu_B(dz)] ds \ \# \end{aligned}$$

系 1.

$$E_x(e^{-\lambda l_B}, l_B > 0) = \int g^{\lambda}(x, y)\mu_B(dy), \ (\lambda \geqslant 0). \quad (3)$$

证. 左方等于

$$\int_{0+}^{\infty} e^{-\lambda t} P_x(l_B \in dt) = \int_{0+}^{\infty} e^{-\lambda t} \int p(t, x, z)\mu_B(dz)dt$$

$$= \int g^{\lambda}(x, z)\mu_B(dz) \#$$

以 $L_B(x, A) = P_x(x(l_B) \in A, l_B > 0)$ 表末遇点分布，则有下列定理，它由 Chung[3] 得到.

定理 2.

$$L_B(x, A) = \int_A g(x, y)\mu_B(dy), \ (x \in R^n, \ A \subset \mathscr{B}^n). \quad (4)$$

证. 取 $f \geqslant 0$ 为 R^n 上连续函数，有紧支集，且在 x 之某邻域为 0. 因为在 $(l_B > t)$ 上，有 $l_B = t + \theta_t l_B$，故对 $\lambda \geqslant 0$ 有

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} E_x[f(x(l_B - t); l_B > t)]dt$$

$$= E_x\left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda t} f(x(l_B - t))dt\right]$$

$$= E_x\left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda(l_B - t)} f(x(t))dt\right]$$

$$= E_x\left[\int_0^{l_B} e^{-\lambda\theta_t l_B} f(x(t))dt\right]$$

$$= \int_0^{\infty} E_x[e^{-\lambda\theta_t l_B} f(x(t)); l_B > t]\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} E_x[f(x(t))E_{x(t)}(e^{-\lambda l_B}; l_B > 0)]\,dt$$

$$= \int_0^{\infty}\int f(z)E_z(e^{-\lambda l_B}, l_B > 0)p(t, x, z)dzdt$$

$$= \int g(x, z) f(z) \left[\int g^{\lambda}(z, y) \mu_B(dy)\right] dz \text{ (由(3))}$$

$$= \int g(x, z) f(z) \left[\int\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p(t, z, y) dt \mu_B(dy)\right] dz$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left[\int\int\int p(t, z, y) f(z) g(x, z) dz \mu_B(dy)\right] dt.$$

两边取反拉氏变换可知，对 L-a.e. $t \in (0, \infty)$，有

$$E_x[f(x(l_B - t)); \ l_B > t]$$
$$= \int\int p(t, z, y) f(z) g(x, z) dz \mu_B(dy). \tag{5}$$

注意 $f(\cdot)g(x, \cdot)$ 连续而且有紧支集．由于(5)中二方皆对 t 连续，故(5)对一切 $t > 0$ 成立．在(5)中令 $t \to 0$，得

$$E_x[f(x(l_B)); \ l_B > 0] = \int f(y) g(x, y) \mu_B(dy).$$

故

$$P_x(l_B > 0, \ x(l_B) \in A) = \int_A g(x, y) \mu_B(dy). \tag{6}$$

对 $A \subset R^n \setminus \{x\}$ 成立．因

$$P_x(l_B > 0) = P_x(h_B < \infty) = \int g(x, y) \mu_B(dy),$$

故(6)对一切 $A \subset R^n$ 成立＃

系 2.

$$P_x(l_B > t, x(l_B) \in A) = \int_A \left[\int_t^{\infty} p(s, x, z) ds\right] \mu_B(dz). \tag{7}$$

证．左式等于

$$P_x(\theta_t(l_B > 0, x(l_B) \in A))$$
$$= E_x P_{x(t)}(l_B > 0, x(l_B) \in A)$$
$$= \int p(t, x, y) P_y(l_B > 0, x(l_B) \in A) dy$$

$$= \int p(t,x,y)\int_A g(y,z)\mu_B(dz)dy$$

$$= \int_A \left(\int_t^\infty p(s,x,z)ds\right)\mu_B(dz) \#$$

系 3. 对相对紧集 B,有

$$L_B(x,dy) = g(x,y)\lim_{|z|\to\infty}\frac{H_B(z,dy)}{g(z,y)}, \tag{8}$$

其中 $H_B(z,A) = P_z(x(h_B)\in A)$ 为首中点分布.

证. 由(6)及§8(5)

$$\frac{L_B(x,dy)}{g(x,y)} = \mu_B(dy) = \lim_{|z|\to\infty}\frac{H_B(z,dy)}{g(z)}.$$

再注意 $\lim_{|z|\to\infty}\frac{g(z,y)}{g(z)} = 1$ 即得(8)#

因之末遇点分布可通过首中点分布来表达.

(二) **球的情形.** 自 x 出发,$|x| < r$,则 B_r 与 S_r 之末遇时同分布,末遇点也同分布. 以下的定理 3—7 皆首见于文献[21,23],定理 3 也在文献[10]中得到.

定理 3. 自 0 出发,球面 S_r 之末遇时 l_{S_r} 的分布 $P_0(l_{S_r}\leqslant t)$ 对 $t>0$ 绝对连续,有密度为

$$f(t) = \frac{r^{n-2}}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}t^{-n/2}e^{-r^2/2t},\ (t>0). \tag{9}$$

证. 由定理 1 及§8 例 1

$$f(t) = \int p(t,x,z)\mu_{S_r}(dz)$$

$$= \frac{r^{n-2}}{c_n}\int_{S_r}\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}e^{-|y|^2/2t}U_r(dy)$$

$$= \frac{r^{n-2}}{c_n|S_r|(2\pi t)^{n/2}}\int_{S_r}e^{-|y|^2/2t}L_{n-1}(dy). \tag{10}$$

将 § 1 (12)对 r 微分，得

$$\int_{S_r} f(|y|)L_{n-1}(dy) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}f(r).$$

特别

$$\int_{S_r} e^{-|y|^2/2t}L_{n-1}(dy) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}e^{-r^2/2t}. \tag{11}$$

以此代入(10)，并注意

$$c_n|S_r| = \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)r^{n-1}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

即得证(9)#

至于球面 S_r 的末遇点分布，则有

$$L_{S_r}(x, dy) = \frac{r^{n-2}}{|y-x|^{n-2}} U_r(dy), (x \in R^n). \tag{12}$$

实际上，由(4)

$$\begin{aligned} L_{S_r}(x, dy) &= g(x, y)\mu_{S_r}(dy) \\ &= \frac{c_n}{|y-x|^{n-2}} \cdot \frac{r^{n-2}}{c_n} U_r(dy) \\ &= \frac{r^{n-2}}{|y-x|^{n-2}} U_r(dy). \end{aligned}$$

特别，由(12)及 § 3 定理 2，知

$$P_0(x(h_r) \in A) = U_r(A) = P_0(x(l_{S_r}) \in A).$$

即自 0 出发，S_r 之首中点与末遇点同分布，即球面上之均匀分布.

定理 4. 对 $n(\geqslant 3)$ 维布朗运动，当且只当 $m < \frac{n}{2}-1$ 时，$E_0(l_{S_r})^m < \infty$，而且

$$E_0(l_{S_r})^m = r^{2m}/(n-4)(n-6)\cdots(n-2m-2),$$
$$(n>4). \tag{13}$$

证. 由(9)

$$E_0(l_{S_r})^m = \frac{r^{n-2}}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\int_0^\infty s^{m-\frac{n}{2}} e^{-r^2/2s} ds$$
$$= \frac{r^{2m}}{2^m\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-m-2} e^{-u} du.$$

后一积分当且只当 $\frac{n}{2} > m+1$ 时收敛，其值为 $\Gamma\left(\frac{n}{2}-m-1\right)$. 利用等式 $\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}-m-1\right)\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{n}{2}-i-1\right)$，即得(13)#

于是此矩有成双性质：$n=3, 4$ 时，$E_0(l_{S_r})=\infty$；$n=5, 6$ 时，$E_0(l_{S_r})<\infty$；$n=7, 8$ 时，$E_0(l_{S_r})^2<\infty$ 等等.

关于矩还有一有趣性质：由 § 3 注 2、§ 3 定理 1 以及本节(13)，以 $l_r^{(n)}$, $h_r^{(n)}$ 及 $T_r^{(n)}$ 分别表 n 维空间中布朗运动对 S_r 的末遇时、首中时及在 B_r 中的停留时间

$$T_r^{(n)} = \int_0^\infty \chi_{B_r}(x_t)dt,$$

(χ_A 表 A 的示性函数)，则有

$$E_0[h_r^{(n)}] = E_0[T_r^{(n+2)}] = E_0[l_r^{(n+4)}] = \frac{r^2}{n}, \quad (n \geqslant 1). \tag{14}$$

在 § 3 注 2 中已知 $h_r^{(n)}$ 与 $T_r^{(n+2)}$ 关于 P_0 同分布；上式可视为此事实在矩的方面的延拓. (14)式还反映布朗粒子逃逸速度随维数 n 增高而加大.

以下固定 $n \geqslant 3$，简写 $l_r^{(n)}$ 为 $l_r(=l_{S_r})$，$h_r^{(n)}$ 为 h_r，并定义

$$M_r = \max_{0 \leqslant t \leqslant l_r} |x(t)|, \quad \alpha_r = \min_t (|x_t| = M_r, t \leqslant l_r). \tag{15}$$

M_r 是 n 维布朗运动粒子在末遇球面 S_r 前所走的极大游程，即与原点的最大距离，而 α_r 为首达极大的时刻.

定理 5. 对 x，$|x| \leqslant r$，有

$$P_x(M_r \leqslant a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leqslant r, \\ 1 - \left(\dfrac{r}{a}\right)^{n-2}, & \text{如 } a > r. \end{cases} \tag{16}$$

证　先设 $a > r$.

$$P_x(M_r \geqslant a) = P_x(l_r > h_a)$$

$$= \int_{S_a} P_x(x(h_a) \in db) P_b(l_r > 0).$$

当 $b \in S_a$ 时，$|b| = a > r$. 由 § 4(15)，得

$$P_b(l_r > 0) = P_b(h_r < \infty) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2};$$

$$P_x(M_r \geqslant a) = \int_{S_a} P_x(x(h_a) \in db) \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}$$

$$= \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2};$$

$$P_x(M_r > a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_x(M_r \geqslant a + \varepsilon) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}.$$

次设 $a < r$. 由 M_r 之定义，显然有 $P_x(M_r \leqslant a) = 0$. 最后设 $a = r$. 由已证明的二结果得

$$P_x(M_r = r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} p_x(r - \varepsilon < M_r \leqslant r + \varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P_x(M_r \leqslant r + \varepsilon) - P_x(M_r \leqslant r - \varepsilon)]$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left[1-\left(\frac{r}{r+\varepsilon}\right)^{n-2}\right]=0,$$

$$P_x(M_r \leqslant r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_x(M_r \leqslant r-\varepsilon) + P_x(M_r = r) = 0_{\#}$$

由(16)知 $P_x(M_r \leqslant a)$ 不依赖于 x，$|x| \leqslant r$. 它有密度

$$g_r(a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leqslant r, \\ (n-2)r^{n-2}/a^{n-1}, & \text{如 } a > r. \end{cases} \tag{17}$$

其 m 级矩为

$$E_x(M_r^m) = (n-2)r^{n-2}\int_r^{\infty} a^m a^{1-n} da$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{如 } m \geqslant n-2, \\ \dfrac{n-2}{n-m-2}r^m, & \text{如 } m < n-2, \end{cases}$$

$$(|x| \leqslant r). \tag{18}$$

由此知：$n=3$ 时，$E_x(M_r)=\infty$；$n=4$ 时，$E_x(M_r)<\infty$，但二级矩不存在；$n=5$ 时，$E_x(M_r^2)<\infty$，但三级矩不存在；等等.

今引入二特征数 C_l 及 C_M：

$$C_l = \text{Max}\,(\text{整数 } m \geqslant 0,\ E_0(l_r^m) < \infty),$$

$$C_M = \text{Max}\,(\text{整数 } m \geqslant 0,\ E_0(M_r^m) < \infty).$$

由(13)及(18)知它们依赖于空间维数 n，但不依赖于球的半径 $r>0$；而且还有下表

n	3	4	5	6	……	$2k-1$	$2k$
C_l	0	0	1	1		$k-2$	$k-2$
C_M	0	1	2	3		$2k-4$	$2k-3$

这说明 $2k-1$ 与 $2k$ 维布朗运动，虽有相同的 $C_l=k-2$，

却有不同的 C_M，分别为 $2k-4$ 与 $2k-3$. 用 C_l 可以把各维布朗运动按维数一对一对地区别开来，而用 C_M 则可一一地分开. 在此意义上，C_M 比 C_l 更精确些.

现在讨论 M_r 的修正变量 N_r

$$N_r=\frac{M_r-r}{\sqrt{D_xM_r}}\quad(n>4). \tag{19}$$

N_r 依赖于 n，又 D 表方差. 由(18)，当 $|x|\leqslant r$ 时

$$E_x(M_r)=\frac{n-2}{n-3}r,\quad D_x(M_r)=\frac{n-2}{(n-3)^2(n-4)}r^2. \tag{20}$$

定理 6. 当 $|x|\leqslant r$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}P_x(N_r\leqslant a)=\begin{cases}0, & \text{如 } a\leqslant 0;\\ 1-e^{-a}, & \text{如 } a>0.\end{cases} \tag{21}$$

证.

$$P_x(N_r>a)=P_x\left(\frac{M_r-r}{\dfrac{r}{n-3}\sqrt{\dfrac{n-2}{n-4}}}>a\right)$$

$$=P_x\left(M_r>\frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}+r\right).$$

由定理 5，当 $\dfrac{ar}{n-3}\sqrt{\dfrac{n-2}{n-4}}+r\leqslant r$ 时，亦即当 $a\leqslant 0$ 时，有 $P_x(N_r>a)=1$. 由此得(21)中第一结论. 当 $a>0$ 时，仍由定理 5，

$$P_x(N_r>a)=\left[r\Big/\left(\frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}+r\right)\right]^{n-2}$$

$$=1\Big/\left[1+\frac{a}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}\right]^{n-3}\left(1+\frac{a}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}\right)$$

$$\to e^{-a},\quad(n\to\infty)_{\blacksquare}$$

今以 q_{ni} 表 Bessel 函数 $J_\nu(z)\left(\nu=\frac{n}{2}-1\right)$的正零点，又

$$\xi_{ni}=q_{ni}^{\nu-1}/2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)J_{\nu+1}(q_{ni}).$$

定理 7.

(i) $$P_0(\alpha_r>t)=(n-2)r^{n-2}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{ni}\cdot\int_r^\infty\frac{1}{a^{n-1}}e^{-q_{ni}^2t/2a^2}da;$$

(ii) $$E_0\alpha_r=\frac{n-2}{n(n-4)}r^2,\ (n>4).$$

证. α_r 是首中随机球面 S_{M_r} 的时间，亦即 $\alpha_r=h_{M_r}$. 由此及(17)得

$$P_0(\alpha_r>t)=P_0(h_{M_r}>t)=\int_r^\infty P_0(h_a>t)P_0(M_r\in da)^{1)}$$
$$=\int_r^\infty P_0(h_a>t)\frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}}da.$$

以 § 3(10)代入上式即得证 (i). 其次

$$E_0\alpha_r=\int_0^\infty P_0(\alpha_r>t)dt$$
$$=\int_r^\infty\left[\int_0^\infty P_0(h_a>t)dt\right]\frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}}da,$$

但由(14)

$$\int_0^\infty P_0(h_a>t)dt=E_0(h_a)=\frac{a^2}{n}.$$

故

---

1) 可以证明：当 $r<a\leqslant b$ 时，有

$$P_0(h_a>t,\ M_r\geqslant b)=P_0(h_a>t)\cdot P_0(M_r\geqslant b).$$

$$E_0\alpha_r = \frac{(n-2)r^{n-2}}{n}\int_r^\infty \frac{da}{a^{n-3}} = \frac{n-2}{n(n-4)}r^2,$$

于是对同一 n，同一半径 r，由上式及(14)得

$$E_0h_r = \frac{r^2}{n} < E_0T_r = \frac{r^2}{n-2} < E_0\alpha_r$$

$$= \frac{n-2}{n(n-4)}r^2 < E_0d_r = \frac{r^2}{n-4},$$

其中 $E_0T_r < E_0\alpha_r$ 不是直观上可以预料的.

§13. 格林 (Green) 函数

(一) 上调和(superharmonic) 函数. 设 $G\subset R^n$ 为一开集,取值于$(-\infty,\infty]$、但在G的任一连通分中都不恒等于∞的函数 $f(x)$, $(x\in G)$ 称为在G内上调和,如果

1° f 下连续于 G;

2° 对每 $x\in G$, 存在 $\delta>0$, 使当球 $B_\delta(x)\subset G$ 时,对每 $0<r<\delta$, 有

$$\int_{S_r(x)} f(y)U_r(dy)\leqslant f(x) \tag{1}$$

U_r 表 $S_r(x)$ 上的均匀分布.

利用布朗运动,条件(1)可改写为

$$E_xf(x_\tau)\leqslant f(x) \tag{2}$$

τ 为 $\mathring{B}_r(x)$ 的首出时,亦即 $S_r(x)$ 的首中时.

称函数 f 在G内下调和 (subharmonic), 如 $-f$ 在G内上调和.

显然,常数在 R^n 内上(下)调和; 在G内调和的函数在G内上(下)调和.

以下皆设 $n\geqslant 3$.

由§4例1, $g(y-x)=c_n/|y-x|^{n-2}$ 作为 y 的函数,

在 $R^n\setminus\{x\}$ 调和，在 R^n 为上调和.

容易证明，势 $G\mu(x)=\int g(y-x)\mu(dy)$ 如不恒等于∞，则它在任一开集D内为上调和. 实际上，在§7定理2之证中，已证明 $G\mu(x)$ 下连续. 其次，利用 $g(y-x)$ 的上调和性，有

$$\begin{aligned}\int_{S_r(x)}G\mu(y)U_r(dy)&=\int_{S_r(x)}\int g(z-y)d\mu(z)U_r(dy)\\&=\iint_{S_r(x)}g(z-y)U_r(dy)d\mu(z)\\&\leqslant\int g(z-x)d\mu(z)=G\mu(x).\end{aligned}\tag{3}$$

由于上调和函数的非负线性组合也上调和，故如 $h(x)$ 为开集D中调和函数，则

$$f(x)=G\mu(x)+h(x)\quad(x\in D)\tag{4}$$

也在D中为上调和.

有趣的是反面的结果也成立： 设 $f(x)$ 在开集D内上调和，则 f 可表为

$$f(x)=G_D\mu(x)+h(x),\tag{5}$$

其中 $h(x)$ 在D内调和，而且是在D内不超过 f 的最大调和函数； $G_D\mu(x)$ 为格林势，即

$$G_D\mu(x)=\int g_D^*(x,y)\mu(dy),\tag{6}$$

其中 $g_D^*(x,y)$ 是下面即将定义的D的格林函数，而μ为支集含于D的 Radon 测度，而且μ被 f 唯一决定.

(5) 式称为 f 的 Riesz 分解，它与以下诸结论之证可见文献[17].

调和函数有很好的解析性质，而上调和函数则不然，甚至连续性也不能保证. 但它却可被很好的函数列所逼近：设

$f(x)$ 在开集D内为上调和，D_m 为相对紧开集列，$D_m\uparrow D$，则存在有界、无穷次可微、在 D_m 为上调和的函数 f_m，使在 D_m 内，$f_r\geqslant f_m(r>m)$， 而且在D内有 $\lim\limits_{m\to\infty}f_m=f$； 如 $f\geqslant 0$，则也可取 $f_m\geqslant 0$.

上调和函数与极集有下列关系： 设 f 在开集 D 内上调和，则 $(x\in D: f(x)=\infty)$ 的每一紧子集是极集；反之，设D开，$B\subset D$，B 为极集，又 $x\in D\backslash B$，则存在于D内为上调和的函数 f，使在 B 上 $f=\infty$，又 $f(x)<\infty$.（因使$f(x)=\infty$之点 x 通常称为 f 的极点，这也许是极集命名的原因）.

称定义在开集D内的非负函数 f 为在D内过份，如果它在D之任一连通成分内不恒等于∞，而且

$$E_x(f(x_t),\ t<e_D)\leqslant f(x),\quad (\text{任意 } t>0);$$

$$\lim_{t\to 0}E(f(x_t),\ t<e_D)=f(x)\quad (e_D \text{ 为}D\text{的首出时}).$$

可以证明：设 $f\geqslant 0$，D为开集，则 f 上调和于D的充要条件是它在D内过份.

此结果把上调和函数与布朗运动联系起来.

（二）函数 $g_B(x,y)$ 的性质： 对 $B\in\mathscr{B}^n$，$(n\geqslant 3)$，在§6中定义了

$$g_B(x,\ y)=\int_0^\infty q_B(t,\ x,\ y)\,dt, \tag{7}$$

其中 $q_B(t,x,y)$ 为禁止转移密度. 直观上，$g_B(x,y)dy$ 可理解为自 x 出发在到达B之前在$(y,\ y+dy)$中的平均停留时间. 由§6(14)

$$\begin{aligned}g(y-x)&=\int_B H_B(x,dz)g(y-z)+g_B(x,y)\\&=E_xg(y-x(h_B))+g_B(x,y).\end{aligned} \tag{8}$$

上面已叙及 $g(y-x)$ 有关调和的性质，故为研究 $g_B(x,y)$，只需先研究

$$F_B(x, y) = \int_B H_B(x, dz) g(y - z) = E_x g(y - x(\tau_B)). \quad (9)$$

以 $F(x, \cdot)$ 表 $F(x, y)$ 中，x 固定，y 流动.

引理 1. $F_B(x, \cdot)$ 在 R^n 为上调和，在 $(\bar{B})^c$ 调和.

证. 由 Fatou 引理

$$\varliminf_{y \to a} F_B(x, y) = \varliminf_{y \to a} \int_B H_B(x, dz) g(y - z)$$

$$\geqslant \int_B H_B(x, dz) \varliminf_{y \to a} g(y - z)$$

$$\geqslant \int_B H_B(x, dz) g(a - z) = F_B(x, a). \quad (10)$$

故 $F_B(x, \cdot)$ 下连续. 次对 $a \in R^n$ 及球 $B_r(a)$，有

$$\int_{S_r(a)} F_B(x, z) U_r(dz)$$

$$= \int_{S_r(a)} \int_B H_B(x, dv) g(z - v) U_r(dz)$$

$$= \int_B H_B(x, dv) \int_{S_r(a)} g(z - v) U_r(dz)$$

$$\leqslant \int_B H_B(x, dv) g(a - v) = F_B(x, a). \quad (11)$$

此得证第一结论. 下证在 $(\bar{B})^c$ 之调和性.

先证在 $a \bar{\in} \bar{B}$，$F_B(x, \cdot)$ 有球面平均性. 取 $S_r(a) \subset (\bar{B})^c$，推理如(11)，但(11)中不等号应为等号，此因 $g(\cdot - v)$ 在 $R^n \backslash \{v\}$ 为调和，而 $v \in \bar{B}$，故它在 $(\bar{B})^c$ 调和. 再证 $F_B(x, \cdot)$ 的局部可积性. 由于 $\bar{B}$ 闭，当 $z \in \bar{B}$ 而 y 属于紧集 $K \subset (\bar{B})^c$ 时，$g(y - z)$ 对 z 有界；由(9) $F_B(x, y)$ 对 $y \in K$ 也有界，从而它在 $(\bar{B})^c$ 局部可积. 于是由 § 4 定理 2，$F(x, \cdot)$ 在 $(\bar{B})^c$ 调和#

引理 2. 设 G_m 及 G 皆开，又

$$G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_2 \subset \bar{G}_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_m G_m = G. \quad (12)$$

则对 $x\in G$，$y\in G$，有

$$\lim_{m\to\infty} F_{G_m^c}(x,y)=F_{G^c}(x,y). \tag{13}$$

证．当 m 充分大时，$x\in G_m$，$y\in G_m$，

$$\begin{aligned}F_{G_m^c}(x,y)&=E_x g(y-x(h_{G_m^c}))=E_x g(y-x(h_{\partial G_m}))\\&=E_x[g(y-x(h_{\partial G_m}));\ h_{\partial G}<\infty]\\&\quad+E_x[g(y-x(h_{\partial G_m}));h_{\partial G}=\infty].\end{aligned} \tag{14}$$

注意 $x(h_{\partial G_m})\in G_m^c$；当 $y\in G_m$ 固定时，$g(y-z)$ 对 $z\in G_m^c$ 有界连续；又在 $h_{\partial G}<\infty$ 上，由§6引理2，对 $x\in G$，P_x 几乎处处有 $x(h_{\partial G_m})\to x(h_{\partial G})$．由于这些原因，(14)中最右方的第一项趋于

$$\begin{aligned}&E_x[g(y-x(h_{\partial G}));h_{\partial G}<\infty)\\&\quad=E_x[g(y-x(h_{G^c}));\ h_{G^c}<\infty]=F_{G^c}(x,y).\end{aligned} \tag{15}$$

在 $h_{\partial G}=\infty$ 上，$P_x(x\in G)$ 几乎处处有 $h_{\partial G_m}\uparrow\infty$，

$$\lim_{m\to\infty}|x(h_{\partial G_m})|=\infty;$$

再注意 $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(y-x)=0$，并利用控制收敛定理，知右方第二项趋于0＃

关于 $g_B(x,y)$ 的性质，在§6中已有叙述，今再补充如下：

(i) $g_B(x,y)<\infty$，$(x\neq y)$；$g_B(x,x)=\infty$，$x\bar{\in}\bar{B}$．
事实上，由 $q_B(t,x,y)\leqslant p(t,x,y)$ 得

$$g_B(x,y)\leqslant g(x,y)<\infty\quad(x\neq y).$$

次如 $x\bar{\in}\bar{B}$，由(8)

$$g_B(x,x)=g(0)-\int_B H_B(x,dz)g(x-z),$$

$g(0)=\infty$；又当 $x\bar{\in}\bar{B}$ 时，$g(x-z)$ 对 $z\in\bar{B}$ 有界连续，故上式中积分有穷，于是 $g_B(x,x)=\infty$．

由(8)及引理1，立得

(ii) $g_B(x,\cdot)$ 上连续，在 $R^n\setminus\{x\}$ 为下调和.

(iii) $g_B(x,y)$ 对 $y\in(\bar{B})^c-\{x\}$ 调和.

(iv) $g_B(x,y)-g(y-x)$ 对 $y\in(\bar{B})^c$ 调和.

(v) 如 $a\in B^r$, $\lim\limits_{y\to a}g_B(x,y)=g_B(x,a)=0$.

事实上，由 (ii) 及 § 6,7)

$$0\leqslant\overline{\lim_{y\to a}}g_B(x,y)\leqslant g_B(x,a)=0.$$

（三）**格林函数**. 设 G 为非空开集，定义在 $G\times G$ 上的非负函数 $g_G^*(x,y)$ 称为 G 的格林函数，如果

1) $g_G^*(x,y)-g(y-x)$ 对 y 在 G 内调和；

2) 若另一 $u(x,y)\geqslant 0(x\in G,y\in G)$ 也使 $u(x,y)-g(y-x)$ 对 y 在 G 内调和，则

$$u(x,y)\geqslant g_G^*(x,y). \qquad (16)$$

下定理是布朗运动与势论间的一重要联系.

定理 1. 开集 G 的格林函数 g_G^* 等于 g_{G^c} 在 $G\times G$ 上的限制，即

$$g_G^*(x,y)=g_{G^c}(x,y)\quad(x\in G,y\in G). \qquad (17)$$

证. 1° 由性质 (iv) 立得证 $g_{G^c}(x,y)$ 满足 1).

2° 任取一个满足 2)中条件的 $u(x,y)$，往证

$$u(x,y)\geqslant g_{G^c}(x,y)\quad(x\in G,y\in G). \qquad (18)$$

先设 G 有界而且 $\partial G\subset(G^c)^r$. 由 (v)，对 $a\in\partial G$

$$\underline{\lim_{y\to a}}[u(x,y)-g_{G^c}(x,y)]=\underline{\lim_{y\to a}}u(x,y)\geqslant 0.$$

由 (iv)，既然

$$u(x,y)-g_{G^c}(x,y)=[u(x,y)-g(y-x)]-[g_{G^c}(x,y)-g(y-x)]$$

对 $y\in G$ 调和，故由 § 4 极大原理，即得(18).

3° 设 G 为任意开集. 由 § 6 引理 2，存在有界开集列

$\{G_m\}$，使

$$G_m \subset G,\quad G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \cdots,\quad \bigcup_m G_m = G,$$

而且 $\partial G_m \subset (G_m^c)^r$. 由于 G_m 有界，由 2° 有

$$u(x, y) \geqslant g_{G_m^c}(x, y) \quad (x \in G_m, y \in G_m). \tag{19}$$

因此，如能证 $g_{G_m^c}(x, y) \to g_{G^c}(x, y)$，$(x \in G, y \in G)$，则(18)成立而定理证完.

为此，先设 $x = y \in G$. 对充分大的 m，$x = y \in G_m$. 由(i)

$$\infty = g_{G_m^c}(x, x) \uparrow g_{G^c}(x, x) = \infty.$$

次设 $x \in G$，$y \in G$，$x \neq y$. 对充分大的 m，$y \in G_m$. 由(8)

$$g_{G_m^c}(x, y) = g(y - x) - F_{G_m^c}(x, y),$$
$$g_{G^c}(x, y) = g(y - x) - F_{G^c}(x, y).$$

由此及引理 2 即得所欲证#

作为用概率方法求格林函数之例，考虑开球 $G = \mathring{B}_r$，试证它的格林函数为

$$g_G^*(x, y) = g(y - x) - \left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2} g(y^* - x),$$

$$(n \geqslant 3), \tag{20}$$

其中 $x \in G$，$0 \neq y \in G$，又 y^* 由 y 经 Kelvin 变换(相对于圆周 S_r 的反演)而来，即

$$y^* = r^2 y / |y|^2 \quad (y \neq 0). \tag{21}$$

实际上，由定理 1 及(8)

$$g_G^*(x, y) = g(y - x) - E_x g(y - x(h_{G^c})). \tag{22}$$

设 $z = x(h_{G^c}) \in S_r$. 利用关系式：$z \in S_r$，有

$$|z - y^*| / |z - y| = r / |y|,\quad (y \neq 0),$$

得

$$g(y-z)=\frac{c_n}{|y-z|^{n-2}}-\left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2}g(y^*-z).$$

由于 $g(y^*-x)$ 对 $x\in R^n-\{y^*\}$ 调和，由 §4(5)

$$E_xg(y-x(h_{G^c}))=\left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2}E_xg(y^*-x(h_{G^c}))$$

$$=\left(\frac{r}{|y|}\right)^{n-2}g(y^*-x).$$

由此及(22)即得(20)。

同理可证 $G=(B_r)^c$ 的格林函数也由(20)给出。

第二章 二维布朗运动与对数位势

§14. 对数位势的基本公式

（一）对于一、二维布朗运动，$g(x,y)=\infty$（见§2,(8)），故需考虑另一势核 $k(x,y)$；结果发现，$k(x,y)$ 是对数函数，由它而建立对数位势. 对数势与牛顿势的理论在许多问题上是平行的.

本章中无特别声明时，恒设 $n=2$. 仍令

$$g^{\lambda}(x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}p(t,x)dt,\ p(t,x)=\frac{1}{2\pi t}e^{-|x|^2/2t}.$$

任意固定一点 $u\in R^2$，使 $|u|=1$.（例如，可取 $u=(1,0)$）. 对任意 $x\in R^2$，$y\in R^2$，定义

$$k^{\lambda}(x)=g^{\lambda}(u)-g^{\lambda}(x);\ k^{\lambda}(x,y)=k^{\lambda}(y-x). \tag{1}$$

显见 $k^{\lambda}(x,y)=k^{\lambda}(y,x)$，又

$$\begin{aligned}k^{\lambda}(x)&=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}[p(t,u)-p(t,x)]dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}(e^{-1/2t}-e^{-|x|^2/2t})\frac{dt}{t}.\end{aligned} \tag{2}$$

由此知

$$k^{\lambda}(x)=\begin{cases}0, & \text{如 } |x|=1;\\ >0, & \text{如 } |x|>1, \text{此时 } k^{\lambda}(x) \text{ 随 } \lambda\downarrow 0 \text{ 而上升};\\ <0, & \text{如 } |x|<1, \text{此时 } k^{\lambda}(x) \text{ 随 } \lambda\downarrow 0 \text{ 而下降}.\end{cases} \tag{3}$$

于是存在极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} k^{\lambda}(x) = k(x). \tag{4}$$

这收敛性具有下列性质：

1）单调性：当 $\lambda\downarrow 0$ 时，

$$k^{\lambda}(x)\uparrow k(x),\ \text{如}\ |x|\geqslant 1;$$
$$-k^{\lambda}(x)\uparrow -k(x),\ \text{如}\ |x|\leqslant 1.$$

2）$k^{\lambda}(x)$ 及 $k(x)$ 在 $x\neq 0$ 连续（这由下面 $k(x)$ 的表达式可见），故在不含 0 的紧集上，收敛是均匀的.

现在来求 $k(x)$. 交换积分次序，得

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{-1/2t}-e^{-|x|^2/2t}\right)\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{-t}-e^{-|x|^2t}\right)\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_t^{|x|^2t}e^{-s}ds\right)\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\chi_{[t,|x|^2t]}(s)\frac{dt}{t}\right)e^{-s}ds\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{s/|x|^2}^{s}\frac{dt}{t}\right]e^{-s}ds,
\end{aligned} \tag{5}$$

故

$$k(x) = \frac{1}{\pi}\log|x|,\quad (x\in R^2), \tag{6}$$

$$k(x,y) = \lim_{\lambda\downarrow 0} k^{\lambda}(x,y) = \frac{1}{\pi}\log|x-y|,$$
$$(x,y\in R^2). \tag{7}$$

称 $k(x,y)(=k(y-x)=k(x-y))$ 为对数势的核.

对 $B\in\mathscr{B}^2$，由 §6,(6)

$$E_x e^{-\lambda h_B} = H_B^{\lambda}(x,\overline{B}), \tag{8}$$

$$g^\lambda(u) = \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(u) + g^\lambda(u)[1 - E_x e^{-\lambda h_B}]. \tag{9}$$

又首次通过公式的拉氏变换为

$$g^\lambda(y - x) = \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) g^\lambda(y - z) + g_B^\lambda(x, y). \tag{10}$$

自(10)减去(9)，得

$$k^\lambda(y - x) = \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) k^\lambda(y - z) - g_B^\lambda(x, y) + L_B^\lambda(x), \quad (x, y \in R^2), \tag{11}$$

其中

$$L_B^\lambda(x) = g^\lambda(u)[1 - E_x e^{-\lambda h_B}]. \tag{12}$$

显然，$L_B^\lambda(x) \geqslant 0$，而且当 $x \in B^r$ 时，$L_B^\lambda(x) = 0$。本节的主要目的是证明：如 B 非极集，则可在(11)中令 $\lambda \downarrow 0$ 而得下列(13)式，称它为**对数势的基本公式**。

定理 1. 设 B 为非极集。则

i) $g_B(x, y) < \infty$，$(x \neq y)$；

ii) 存在极限 $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} L_B^\lambda(x) = L_B(x) < \infty$，$(x \in R^2)$；

iii) 对 $x \neq y$，有

$$k(y - x) = \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y - z) - g_B(x, y) + L_B(x). \tag{13}$$

为了证明，须先证若干引理。我们先作一些说明。要在积分号下取极限，可以用单调收敛定理或被积函数列在紧集上的均匀收敛性。因此，我们先对相对紧集证明定理 1，然后考虑一般的 B。对 $A \in \mathscr{B}^n$，令

$$g_B^\lambda(x, A) = \int_A g_B^\lambda(x, y) dy, \quad (\lambda \geqslant 0). \tag{14}$$

引理 1. 设 $B\in\mathscr{B}^n$ $(n\geqslant 1)$ 为非极集，又 A 为相对紧集，则

$$g_B^\lambda(x, A)\uparrow g_B(x, A)=E_x\int_0^{h_B}\chi_A(x_t)dt, \quad (\lambda\downarrow 0); \tag{15}$$

$$\sup_{x\in R^n}E_x\int_0^{h_B}\chi_A(x_t)dt<\infty. \tag{16}$$

证. 由单调收敛定理及

$$g_B^\lambda(x, A)=\int_A\int_0^\infty e^{-\lambda t}q_B(t, x, y)dtdy$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_x(h_B>t, x_t\in A)dt,$$

即得(15)中前式. 又

$$g_B(x, A)=\int_0^\infty P_x(h_B>t, x_t\in A)dt$$

$$=E_x\int_0^{h_B}\chi_A(x_t)dt.$$

设 $n\geqslant 3$. 取球 $B_r\supset A$. 由 §1 引理 2,知

$$g_B(x, A)\leqslant\int_0^\infty P_x(x_t\in A)dt\leqslant\int_0^\infty\int_{B_r}p(t, x, y)dydt$$

$$=\int_{B_r}\frac{c_n}{|x-y|^{n-2}}dy<A_n,$$

其中 c_n, A_n 为常数，故此时(16)成立.

今设 $n\leqslant 2$. 任取 $a\in R^2$, 必存在 $t_0>1$ 使

$$P_a(x_s\in B, \text{对某 } s\in(1, t_0))$$

$$=\int p(1, y-a)P_y(h_B\leqslant t_0-1)dy>0 \tag{17}$$

其中 $\int=\int_{R^2}$. 否则，如说上式对一切 $t_0>1$ 都为 0，则

$$P_a(h_B<\infty)=\int p(1, y-a)P_y(h_B<\infty)dy$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int P(1, y-a) P_y(h_B \leqslant t-1) dy = 0.$$

故由 § 6 系 1 知 $P_x(h_B < \infty) = 0$. 此与 B 非极集矛盾.

由(17),存在紧集 F,有正勒贝格测度,使

$$P_y(h_B \leqslant t_0 - 1) > 0, \quad (y \in F). \tag{18}$$

因 $p(1, x)$ 连续而且严格大于 0,故 $p(1, y-x)$ 对 $y \in F$, $x \in A$ 的下确界大于0. 于是由(18),

$$\inf_{x\in A} P_x(h_B \leqslant t_0) \geqslant \inf_{x\in A}\int_F p(1, y-x) P_y(h_B \leqslant t_0 - 1) dy$$
$$= \delta > 0, \tag{19}$$

其中 δ 为某正数. 令

$$C = (t: x_t \in A, h_B > t), \quad I_j = [jt_0, (j+1)t_0].$$

定义下标集 $D = (j: I_j \cap C$ 非空). 故如 $j' \in D$, 则必存在 $t \in [j't_0, (j'+1)t_0]$, $t < h_B$, 使 $x_t \in A$. 把D排为 $j_1 < j_2 < \cdots$. 定义时刻 $T_1 < T_2 < \cdots$:

$T_1 = \inf(t: t \in C)$, 如右方集非空,否则令 $T_1 = \infty$;

$T_{n+1} = \inf(t: t \in C; t \geqslant j_n t_0)$, 如右方集非空, 否则令 $T_{n+1} = \infty$.

由定义知,如 $T_{n+1} < \infty$, 则 T_{n+1} 是 $[j_n t_0, h_B]$ 中首中 A 的时刻. 以 $N(\leqslant \infty)$ 表D中元的个数. 则

$$P_x(n < N \leqslant n+2) = P_x(T_n < \infty, T_{n+2} = \infty)$$
$$\geqslant P_x(T_n < \infty, h_B \leqslant T_n + t_0)$$
$$= \int_A P_x(T_n < \infty, X(T_n) \in dz) P_z(h_B \leqslant t_0)$$
$$\geqslant \delta P_x(T_n < \infty) = \delta P_x(N > n);$$
$$P_x(N > n+2) \leqslant (1-\delta) P_x(N > n);$$
$$E_x N = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(N > n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(N > 2n)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} P_x(N \geqslant 2n+1) < \frac{2}{\delta} < \infty.$$

以 $|C|$ 表 C 的勒贝格测度，得

$$\sup_x E_x \int_0^{h_B} \chi_A(x_t)\,dt = \sup_x E_x|C|$$

$$\leqslant \sup_x E_x \left|\bigcup_{j\in D} l_j\right| = \sup_x t_0 E_x N < \infty_{\#}$$

注 1. 由 § 6（二），当 $n=1$ 时，引理 1 对任意非空的 $B \in \mathscr{B}^1$ 正确。

引理 2. 设二可测集 $C \subset B$，则

$$g_C(x,y) \geqslant g_B(x,y), \quad (x,y \in R^2). \tag{20}$$

证 $h_C \geqslant h_B$，故对任意 $A \in \mathscr{B}^2$，有

$$P_x(h_C > t, x_t \in A) = P_x(h_B > t, x_t \in A).$$

因而

$$q_C(t,x,y) \geqslant q_B(t,x,y), \quad (\text{a. e. } y), \tag{21}$$

$$\int q_C(t-\varepsilon,x,z)p(\varepsilon,y-z)dz$$

$$\geqslant \int q_B(t-\varepsilon,x,z)p(\varepsilon,y-z)dz.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，即得知(21)对一切 y 成立. 将(21)两边对 t 自 0 至 ∞ 积分即得(20)$_{\#}$

引理 3. 设 $B \in \mathscr{B}^2$，则

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{\bar{B}} H_B^{\lambda}(x,dz)k^{\lambda}(y-z)$$

$$= \int_{\bar{B}} H_B(x,dz)k(y-z). \tag{22}$$

证. 若 B 为极集，则 $H_B^{\lambda}(x,A)=H_B(x,A)=0\,(A \in \mathscr{B}^2)$ 而不须证. 设 B 为非极集. 令 $D=(z: |y-z| \leqslant 1)$，则

$$\int_{\bar{B}} H_B^{\lambda}(x,dz)k^{\lambda}(y-z)$$

$$= E_x e^{-\lambda h_B} k^\lambda(y - x(h_B))\chi_{D^c}(x(h_B))$$
$$- E_x e^{-\lambda h_B}[-k^\lambda(y - x(h_B))\chi_D(x(h_B))]$$
$$= (\mathrm{I}) - (\mathrm{II}), (设)$$

当 $\lambda \downarrow 0$ 时，由上述单调收敛性，(I)，(II) 分别收敛于对应于 $\lambda = 0$ 的类似式 $(k^0(y) = k(y))$，故得证(22)#

注 2. 如 B 为相对紧集，则

$$-\infty < \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)k(y - z) < \infty. \tag{23}$$

$\left(以下简记 \int_F H_B(x, dz)k(y - z) 为 \int_F\right)$.

实际上，因 $k(y - z)$ 对 $z \in \bar{B} \cap D^c$ 有界，故 $\int_{\bar{B}\cap D^c}$ 有限；其次，当 $\lambda \downarrow 0$ 时，$(\mathrm{II}) \uparrow -\int_{\bar{B}\cap D} \leqslant \infty$，而 $(\mathrm{II}) > -\infty$，故 $-\infty \leqslant \int_{\bar{B}\cap D} < \infty$. 于是 $-\infty \leqslant \int_{\bar{B}} < \infty$；又由下面引理 4 之证，"$-\infty \leqslant$"可改为"$-\infty <$".

引理 4. 设 B 为相对紧集，非极集，则定理 1 成立.

证. 取紧集 A，使 $A \cap \bar{B} = \varnothing$ 而且有正勒贝格测度 $|A|$. 将(11)二方对 $y \in A$ 积分，得

$$|A| L_B^\lambda(x) = \int_A k^\lambda(y - x)dy$$
$$- \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz) \int_A k^\lambda(y - z)dz + g_B^\lambda(x, A). \tag{24}$$

令 $\lambda \downarrow 0$ 而分别考虑各项. 由引理 1，

$$g_B^\lambda(x, A) \uparrow g_B(x, A) < \infty. \tag{25}$$

又由

$$\int_A k^\lambda(y - x)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda t}$$

$$\cdot\left[\int_A (e^{-1/2t} - e^{-|y-x|^2/2t})dy\right]\frac{dt}{t} \tag{26}$$

及对 $\int_A k(y-x)dy$ 之类似展式，可见

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_A k^\lambda(y-x)\,dy = \int_A k(y-x)dy. \tag{27}$$

在紧集上均匀成立. 因 $\bar{B}$ 紧，有

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz)\int_A k^\lambda(y-z)dy$$
$$= \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)\int_A k(y-z)dy. \tag{28}$$

由(25)，(27)，(28)知(24)右方有有限极限，故存在有限极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} L_B^\lambda(x) = L_B(x). \tag{29}$$

再由(11)，对 $x \neq y$，知存在有限极限

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\left[-g_B^\lambda(x,y) + \int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz)\,k^\lambda(y-z)\right]$$
$$= k(y-x) - L_B(x). \tag{30}$$

今 $0 \leqslant g_B^\lambda(x, y) \uparrow g_B(x, y) \leqslant \infty$，而由(22)，(23)

$$-\infty \leqslant \lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\bar{B}} H_B^\lambda(x, dz)k^\lambda(y-z)$$
$$= \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)k(y-z) < \infty.$$

故对 $x \neq y$ 必有

$$g_B(x, y) < \infty;\ \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)k(y-z) > -\infty$$

以及(13)成立.∎

定理 1 之证. 因 B 非极集，必有相对紧子集 $A\subset B$ 而且 A 也非极集. 由引理 2 及引理 4，

$$g_B(x, y) \leqslant g_A(x, y) < \infty, \quad (x \neq y). \tag{31}$$

$$L_B^\lambda(x) = g^\lambda(u)[1 - E_x e^{-\lambda h_B}]$$

$$\leqslant g^{\lambda}(u)[1 - E_x e^{-\lambda h_A}] = L_A^{\lambda}(x),$$

$$0 \leqslant \overline{\lim_{\lambda \downarrow 0}} L_B^{\lambda}(x) \leqslant L_A(x) < \infty. \tag{32}$$

由(11),对 $x \neq y$,存在有限极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left[\int_B H_B^{\lambda}(x, dz) k^{\lambda}(y - z) + L_B^{\lambda}(x)\right]$$

$$= k(y - x) + g_B(x, y).$$

由此及(32),(22),必存在有限极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \int_B H_B^{\lambda}(x, dz) k^{\lambda}(y - z)$$

$$= \int_B H_B(x, dz) k(y - z). \tag{33}$$

因而也必存在有限极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} L_B^{\lambda}(x) = L_B(x), \quad (x \in R^2), \tag{34}$$

并且(13)成立。

注 3. 若 $E_x h_B < \infty$, $(x \in R^2)$, 则有

$$L_B(x) \equiv 0. \tag{35}$$

实际上,

$$L_B^{\lambda}(x) = \lambda g^{\lambda}(u) E_x \left(\frac{1 - e^{-\lambda h_B}}{\lambda}\right). \tag{36}$$

当 $\lambda > 0$ 充分小时,括号中函数被 h_B 所控制,故当 $\lambda \downarrow 0$ 时

$$E_x \left(\frac{1 - e^{-\lambda h_B}}{\lambda}\right) \to E_x h_B < \infty; \quad \lambda g^{\lambda}(u) \to 0.$$

故 $L_B(x) \equiv 0$. 特别,如 B^c 为相对紧集,则由§3系1,有 $E_x h_B < \infty (x \in R^2)$. 其次,由(36)知

$$L_B^{\lambda}(x) = 0, \quad L_B(x) = 0, \quad (\text{如 } x \in B^r). \tag{37}$$

第三,如 B 紧,又 $x \bar{\in} B$,则由(36)知 $L_B^{\lambda}(x) = L_{\partial B}^{\lambda}(x)$, 故此时

$$L_B(x) = L_{\partial B}(x). \tag{38}$$

注 4. 如 $B \in \mathscr{B}^2$ 为极集，因而 $P_x(h_B = \infty) = 1$. 由(36)，令 $\lambda \downarrow 0$，自然应定义 $L_B(x) = \infty$.

§15. 平面 Green 函数

（一）利用§14 定理 1，容易讨论 $g_B(x, y)$ 的一些性质，其中 $B \in \mathscr{B}^2$ 为非极集. 由§14(13)

$$g_B(x, y) = \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)k(y - z) - k(y - x) + L_B(x), \tag{1}$$

$$k(x, y) = \frac{1}{\pi} \log |x - y|. \tag{2}$$

由§4 例 1，$k(x, y)$ 对 y 在 $R^2 - \{x\}$ 中调和，在 R^2 内下调和. 令

$$F_B(x, y) = \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)k(y - z) = E_x k(y - x(h_B)). \tag{3}$$

引理 1. 函数 $F_B(x, \cdot)$ 在 R^2 为下调和，在 $(\bar{B})^c$ 调和.

此引理的证全同于§13 引理 1 之证，因为 $k(y - z)$ 具有那里对 $g(y - z)$ 所需的相应性质.

定理 1. 设 $B \in \mathscr{B}^2$ 非极集，则

(i) $0 \leqslant g_B(x, y) < \infty$, $(x \neq y)$.

(ii) $g_B(x, y)$ 对 $y \in R^2 - \{x\}$ 上连续、下调和.

(iii) $g_B(x, y)$ 对 $y \in (\bar{B})^c - \{x\}$ 调和.

(iv) $g_B(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in (\bar{B})^c$ 调和.

(v) $\lim\limits_{y \to a} g_B(x, y) = g_B(x, a) = 0$，如 $a \in B^r$.

证 由§14 定理 1 得 (i). 对 $y \in R^2 - \{x\}$，$k(x, y)$ 调和，而 $F_B(x, y)$ 下调和，故由(1)得 (ii). 同样证明 (iii)

(iv). (v) 之证同 § 13(v) 之证#

（二）称开集 G 为 Green 集，如存在 $G\times G$ 上之函数 $h(x,y)$ 使 $h(x,y)+k(y-x)$ 对 $y\in G$ 调和．此时说函数 $h(x,y)$ 具有性质 $H(G)$．如 G 为 Green 集，具有性质 $H(G)$ 的最小函数称为 G 的 Green 函数．

在 § 13 中已知当 $n\geqslant 3$ 时，任一开集有 Green 函数；而且限制在 $G\times G$ 上的 g_{G^c} 是它的 Green 函数．下定理表示，对 $n=2$，只当 G^c 相当"大"(或 G 相当"小")时，G 才是 Green 集．

定理 2. 开集 G 为 Green 集的充要条件是 G^c 为非极集．这时限制在 $G\times G$ 上的函数 g_{G^c} 是 G 的 Green 函数．

证．充分性：由定理 1(iv)，$g_{G^c}(x,y)+k(y-x)$ 对 $y\in G^c$ 调和，故只要证 g_{G^c} 是具有性质 $H(G)$ 的最小函数．

先考虑 G 有界、并且每点 $x\in\partial G$ 对 G^c 规则的情形．设 h 为任一具 $H(G)$ 的函数，由定理 1(v)

$$\varliminf_{y\to a}[h(x,y)-g_{G^c}(x,y)]=\varliminf_{y\to a}g(x,y)\geqslant 0,$$

$$a\in\partial G\subset(G^c)^r,$$

故由 § 4 极小原理，$h(x,y)\geqslant g_{G^c}(x,y)\geqslant 0$，$y\in G$.

今考虑任意开集 G．由 § 6 引理 2，存在有界开集列 $\{G_n\}$，使

$$G_1\subset\overline{G}_1\subset G_2\subset\cdots,\quad \bigcup_n G_n=G;$$

又 ∂G_n 之点对 G_n^c 规则，而且 $P_x(h_{\partial G_n}\uparrow h_{\partial G})=1$，$(x\in G)$.

由 § 14 引理 2，存在极限 $g^*(x,y)$：

$$g_{G_n^c}(x,y)\uparrow g^*(x,y)\leqslant g_{G^c}(x,y),\tag{4}$$

因 G^c 非极集，$g^*(x,y)\leqslant g_{G^c}(x,y)<\infty$，$(x\neq y)$．下证

$$g^*(x,y)=g_{G^c}(x,y).\tag{5}$$

任取可测函数 $f \geq 0$. 对 $x \in G$, $P_x(h_{G_n^c} = h_{\partial G_n}) = 1$, $P_x(h_{G^c} = h_{\partial G}) = 1$, ($n$ 充分大),故 $P_x(h_{G_n^c} \uparrow h_{G^c}) = 1$, 而有

$$E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t)\,dt \uparrow E_x \int_0^{h_{G^c}} f(x_t)\,dt$$

$$= \int_{R^2} g_{G^c}(x, y) f(y)\,dy;$$

另方面,由单调收敛定理

$$E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t)\,dt = \int_{R^2} g_{G_n^c}(x, y) f(y)\,dy \uparrow$$

$$\int_{R^2} g^*(x, y) f(y)\,dy, \tag{6}$$

比较此二式即知(5)对 a.e. y 成立. 下证(5)对一切 y 也成立.

根据定理1(iv), $g_{G_n^c}(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in G_n$ 调和;又 $g_{G_n^c}(x, y) \uparrow g^*(x, y)$, $g^*(x, y) < \infty$, $(x \neq y)$. 故由 Harnack 定理, $g^*(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in G$ 调和, 因而连续. 另方面, 定理1(iv)表明 $g_{G^c}(x, y) + k(y - x)$ 对 $y \in G$ 也调和、连续, 故由(5)式几乎处处成立即得其对一切 $(x, y) \in G \times G$ 成立. 下面利用此结果以证 g_{G^c} 的最小性.

任取具有性质 $H(G)$ 的函数 $h(x, y)$, $(x, y) \in G \times G$. 因在 G_n 上, h 也有性质 $H(G_n)$, 故由上面对有界开集之证明,知

$$g_{G_n^c}(x, y) \leq h(x, y), \quad (x, y) \in G_n \times G_n.$$

由(5),对 $(x, y) \in G \times G$, 有

$$g_{G^c}(x, y) = g^*(x, y) = \lim_{n \to \infty} g_{G_n^c}(x, y) \leq h(x, y).$$

必要性: 即要证如 G^c 为极集,则 G 非 Green 集. 否则,如说 G 为 Green 集,则如上所述, 对任一具性质 $H(G)$ 的函数 $h(x, y)$, 有

$$g^*(x, y) \leqslant h(x, y) < \infty, \quad x \neq y. \tag{7}$$

任取不恒为0、非负的连续函数 $f(x)$. 因 G^c 为极集，由二维布朗运动的常返性可见

$$E_x \int_0^{h_{G_n^c}} f(x_t)dt \uparrow E_x \int_0^{h_{G^c}} f(x_t)dt$$

$$= E_x \int_0^{\infty} f(x_t)dt = \infty,$$

由此与(6)得

$$\int_{R^2} g^*(x, y)f(y)dy = \infty.$$

即然 $f(x)$ 任意，$g^*(x, y) = \infty$, a.e. y. 此与(7)矛盾#

§16. 对 数 势

(一) 设 μ 为有界测度，有紧支集为 C。函数

$$K\mu(x) = -\int_C k(y-x)\mu(dy)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_C \log \frac{1}{|y-x|}\mu(dy) \tag{1}$$

称为 μ 的势.

由§4例1知，$-k(y-x)$ 作为 y 的函数，在 $R^2-\{x\}$ 调和，在 R^2 为上调和，故仿照§13引理1之证，知 $K\mu(x)$ 在 R^2 为上调和，在 C^c 为调和.

设 B 为任一相对紧集，但非极集，自 z 出发，其首中点分布记为

$$H_B(z, dy) = P_z(x(h_B) \in dy). \tag{2}$$

令 $B_r = (x: |x| \leqslant r)$, $S_r = (x: |x| = r)$, $r > 0$. 取 r 充分大，使 $\mathring{B}_r \supset B$. 以 U_r 表 S_r 上的均匀分布，定义测度 μ_B:

$$\mu_B(dy) = \int_{S_r} H_B(z, dy) U_r(dz). \tag{3}$$

由轨道的连续性及(3)可知,如 B 紧,则 $\mu_B = \mu_{\partial B}$.

定理 1. 设 B 为相对紧集,非极集,则

$$\lim_{|y|\to\infty} g_B(x, y) = L_B(x), \tag{4}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} g_B(x, y) = L_B(y). \tag{5}$$

又在强收敛意义下,有

$$\lim_{|x|\to\infty} H_B(x, dy) = \mu_B(dy). \tag{6}$$

证. 在任意紧集上,对 x 均匀地有

$$k(y-x) - k(y) = \frac{1}{\pi} \log \left|\frac{y-x}{y}\right| \to 0,$$

$$(|y| \to \infty). \tag{7}$$

由 § 14 定理 1,对 $x \neq y$ 有

$$k(y-x) - \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z) = -g_B(x, y)$$

$$+ L_B(x). \tag{8}$$

左方对任意紧集中的 x, 均匀地有

$$[k(y-x) - k(y)] - \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)[k(y-z) - k(y)]$$

$$\to 0, \quad (|y| \to \infty).$$

故左边同样地也趋于 0 而得证 (4). 由对称性 $g_B(x, y) = g_B(y, x)$ 得(5).

由 § 5(18),

$$H_{S_r}(x, dy) = \frac{|x|^2 - r^2}{|y-x|^2} U_r(dy) \quad (x \bar{\in} S_r). \tag{9}$$

仿 § 8 引理 1 之证,知在测度的强收敛下有

$$\lim_{|x|\to\infty} H_{S_r}(x, dy) = U_r(dy). \tag{10}$$

由强马氏性及(3),对 $x\bar{\in}B_r$, 有

$$
\begin{aligned}
&|H_B(x, A) - \mu_B(A)| \\
&= \left|\int_{S_r} H_{S_r}(x, dy)H_B(y, A) - \int_{S_r} U_r(dy)H_B(y, A)\right| \\
&\leqslant \int_{S_r} |H_{S_r}(x, dy) - U_r(dy)|. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

对一切 $A \in \mathscr{B}^2$ 成立,故由(10)知(6)在强收敛意义下正确#.

直观地,(10)式可理解为自∞出发,首中 S_r(或 B_r)的点的分布为均匀分布,这与自 0 出发,S_r(或 B_r^c)的首中点的分布相同.而(6)则表示:自∞出发,B 的首中点的分布为 μ_B(比较 § 8(7)).又(4)可理解为:自 x 出发,在首中 B 以前,在"∞远的单位面积的邻域"中的平均停留时间约为 $L_B(x)$,对(5)也可作类似的解释:自∞出发,在首中 B 以前,在 y 的单位面积的邻域中的平均停留时间约为 $L_B(y)$.

以后还会看到,在位势论中,应把 μ_B 看成 B 的平衡分布.

定理 2. 设 B 为相对紧集,则存在有限极限

$$\lim_{|x|\to\infty} [L_B(x) - k(x)] = R(B), \qquad (12)$$

而且 μ_B 的势 $K\mu_B$ 满足

$$K\mu_B(x) = R(B) - L_B(x). \qquad (13)$$

证. 由 § 14 定理 1

$$
\begin{aligned}
&k(y - x) - k(x) - \int_{\bar{B}} H_{\bar{B}}(x, dz)k(y - z) \\
&\qquad + g_B(x, y) = L_B(x) - K(x). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

右方与 y 无关. 如 $\bar{B}$ 紧, $y\bar{\in}\bar{B}$, 则 $k(y - z)$ 对 $z \in \bar{B}$ 有界. 故由定理 1

$$
\begin{aligned}
&\lim_{|x|\to\infty} \int_{\bar{B}} H_B(x, dz)k(y - z) \\
&= \int_{\bar{B}} \mu_B(dz)k(y - z) = K\mu_B(y).
\end{aligned}
$$

令 $|x| \to \infty$，由此式及(5)，得知(14)左方趋于 $K\mu_B(y) + L_B(y)$。因此，(14)右方也有有限极限，记为 $R(B)$，即得(12)。并且

$$K\mu_B(y) + L_B(y) = R(B), \quad (y \bar{\in} \bar{B}).$$

这得证(13)对 $x \bar{\in} \bar{B}$ 成立。下证它对 $x \in \bar{B}$ 也成立。

取 $y \in \bar{B}$。由(14)及(12)

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z) = L_B(y) - R(B). \quad (15)$$

另方面，取 r 充分大，使开圆 $\mathring{B}_r \supset \bar{B}$。当 $|x| > r$ 时，由强马氏性有

$$\int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z)$$
$$= \int_{S_r} H_{S_r}(x, d\xi) \int_{\bar{B}} H_B(\xi, dz) k(y-z).$$

如能证明 $\int_{\bar{B}} H_B(\xi, dz) k(y-z)$ 对 $|\xi| > r$ 有界，则由定理 1 (6)及上式立得

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\bar{B}} H_B(x, dz) k(y-z)$$
$$= \int_{S_r} U_r(d\xi) \int_{\bar{B}} H_B(\xi, dz) k(y-z)$$
$$= \int_{\bar{B}} \mu_B(dz) k(y-z) = -K\mu_B(y). \quad (16)$$

(15) (16) 的右方应相等，故得证(13)对 $x \in \bar{B}$ 也成立。剩下要证当 $y \in \bar{B}$ 时，$\int_{\bar{B}} H_B(\xi, dz) k(y-z)$ 对 $|\xi| > r$ 有界。为此，改写(14)为

$$\int_{\bar{B}} H_B(\xi, dz) k(y-z) = g_B(\xi, y) + k(y-\xi) - L_B(\xi). \quad (17)$$

因 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\dfrac{k(y-\xi)}{k(\xi)}=1$，故由(12)，对 $y\in\bar{B}$，当 $|\xi|>r$，r 充分大后，$k(y-\xi)-L_B(\xi)$ 有界。又由 § 15 定理 1 (iii)，$g_B(\xi, y)$ 对 $y\in\bar{B}$，$|\xi|>r$ 有界。故(17)的右方对 $|\xi|>r$ 有界。因之其左方也如此#

对非极集的相对紧集 B，称测度 μ_B 为 B 的平衡测度，其势 $K\mu_B$ 称为 B 的平衡势，称常数 $R(B)$ 为 B 的 Robin 常数。

如 B 为相对紧的极集，则定义 $R(B)=\infty$. 以后会看到，这样的定义是合理的。

当 B 为紧集时，由于 $\mu_B=\mu_{\partial B}; L_B(x)=L_{\partial B}(x),(x\bar{\in}B)$（见 § 14(38)），自(13)立得

$$R(B)=R(\partial B). \tag{18}$$

例 1. 考虑圆 B_r 及圆周 S_r. 由 (10) 及上所述得二者的平衡测度都是 S_r 上的均匀分布 U_r

$$\mu_{B_r}=\mu_{S_r}=U_r. \tag{19}$$

还可证明：

$$L_{B_r}(x)=\begin{cases}0, & \text{如 } |x|\leqslant r,\\ \dfrac{1}{\pi}\log\left(\dfrac{|x|}{r}\right), & \text{如 } |x|>r.\end{cases} \tag{20}$$

实际上，如 $|x|\leqslant r$，由 § 14(37)得 $L_{B_r}(x)=0$. 今设 $|x|>r$，在对数势的基本公式(§ 14 (13))中，取 $y=0$ 得

$$L_{B_r}(x)=k(-x)+g_{B_r}(x,0)-\int_{B_r}H_{B_r}(x,dz)k(-z). \tag{21}$$

由 § 15 定理 1(v)，$g_{B_r}(x,0)=0$. 当 $|x|>r$ 时

$$\int_{B_r}H_{B_r}(x,dz)k(-z)=\int_{S_r}H_{S_r}(x,dz)k(-z)$$
$$=\int_{S_r}H_{S_r}(x,dz)\frac{1}{\pi}\log r=\frac{1}{\pi}\log r. \tag{22}$$

于是由(21)得

$$L_{B_r}(x) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{|x|}{r}\right) = L_{S_r}(x),\quad (|x| > r). \tag{23}$$

由(12)(20)及(18)，得 Robin 常数为

$$R(B_r) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right) = R(S_r). \tag{24}$$

由(13)，(24)，(20)，得平衡势为

$$K\mu_{B_r}(x) = K\mu_{S_r}(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\log\left(\frac{1}{|x|\vee r}\right), \tag{25}$$

其中 $a\vee b = \max(a, b)$.

§ 17. 平面上的容度

(一) 试研究 Robin 常数的一些性质.

引理1. 设 A, B 为相对紧集，则

$$R(A\cup B) + R(A\cap B) \geqslant R(A) + R(B); \tag{1}$$

又若 $A\subset B$，则

$$R(A) \geqslant R(B). \tag{2}$$

证. 设 $A\subset B$. 如 B 为极集，则 A 必为极集，于是 $R(A) = R(B) = \infty$. 如 B 非极集，A 为极集，则(2)显然成立. 如二者皆非极集，由 $L_B^t(x)$ 的定义(§ 14，(12))以及 $h_A \geqslant h_B$，得

$$L_B^t(x) \leqslant L_A^t(x);\quad L_B(x) \leqslant L_A(x). \tag{3}$$

于是由 § 16(12)得证(2).

今证(1). 只需对 A, B 皆非极集证明. 由于 $h_{A\cup B} = h_A\wedge h_B$，有[1)]

$$P_x(h_{A\cup B}\leqslant t) \leqslant P_x((h_A\leqslant t)\cup(h_B\leqslant t)), \tag{4}$$

---

1) $h_{A\cap B}\geqslant h_A\vee h_B$.

$$P_x(h_A \leqslant t, h_B \leqslant t) = P_x(h_A \leqslant t) + P_x(h_B \leqslant t)$$
$$- P_x((h_A \leqslant t) \cup (h_B \leqslant t)) \leqslant P_x(h_A \leqslant t)$$
$$+ P_x(h_B \leqslant t) - P_x(h_{A\cup B} \leqslant t). \tag{5}$$

由 § 14(12)得

$$L^\lambda_{A\cap B}(x) \geqslant L^\lambda_A(x) + L^\lambda_B(x) - L^\lambda_{A\cup B}(x). \tag{6}$$

令 $\lambda \downarrow 0$，得

$$L_{A\cap B}(x) \geqslant L_A(x) + L_B(x) - L_{A\cup B}(x). \tag{7}$$

由 § 16(12)即得(1)#.

定理 1. i) 设 B 为紧集，则

$$R(B) = \sup(R(U): U\text{开}, U \supset B, \bar{U}\text{紧}). \tag{8}$$

ii) 设 U 为相对紧开集，则

$$R(U) = \inf(R(A): A\text{紧}, A \subset U). \tag{9}$$

证. i) 设 B 紧. 取一列相对紧开集 $\{B_n\}$,

$$B_1 \supset \bar{B}_2 \supset B_2 \supset \cdots; \quad \bigcap_n B_n = \bigcap_n \bar{B}_n = B.$$

由 § 6 引理 1,

$$P_x(h_{B_n} \uparrow h_B) = 1, \text{一切 } x \in B^c \cup B^r. \tag{10}$$

先对 B 为极集的情况证明(8). 此时 $R(B) = \infty$. 只要证(8)之右方也等于∞. 任取 $f \geqslant 0$; 有紧支集为 D, $D \cap \bar{B}_1 = \varnothing$; 又 f 在 R^2 上之积分为 1. 令

$$Af(z) = \int k(y-z)f(y)dy = \int_D k(y-z)f(y)dy.$$

$\int = \int_{R^2}$. 如 § 16 开头时所述，$Af(z)$ 对 $z \in D^c \supset \bar{B}_1$ 连续，故在 B_1 上有界. 从而

$$\left|\int_{B_n} H_{B_n}(x, dz)Af(z)\right| \leqslant \sup_{z \in \bar{B}_1} |Af(z)| = M < \infty. \tag{11}$$

由 § 16 (13)，并注意 $\int f(x)dx = 1$，

$$\int K\mu_{B_n}(x)f(x)dx + \int L_{B_n}(x)f(x)dx = R(B_n). \quad (12)$$

今欲令 $n\to\infty$，如能证右方第一积分有界，第二积分上升到 ∞，则 $R(B_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$ 而(8)得证. 为此，先有

$$\left|\int K\mu_{B_n}(x)f(x)dx\right| \leqslant \left|\int Af(x)\mu_{B_n}(dx)\right|$$

$$= \left|\int_{B_n} Af(x)\mu_{B_n}(dx)\right| \leqslant M < \infty. \quad (13)$$

其次，为证第二积分 $\uparrow\infty$，只要证 $L_{B_n}(x)\uparrow\infty$.

利用 § 14(13)及(11)，有

$$\left|-\int g_{B_n}(x,y)f(y)dy + L_{B_n}(x)\right| = \left|Af(x)\right.$$

$$\left.-\int_{\bar{B}_n} H_{B_n}(x,dz)Af(z)\right| \leqslant |Af(x)|$$

$$+ M < \infty. \quad (14)$$

但当 $x\in B^c$ 时，由(10)

$$\int g_{B_n}(x,y)f(y)dy = E_x\int_0^{h_{B_n}} f(x_t)dt \uparrow E_x\int_0^{h_B} f(x_t)dt. \quad (15)$$

因 B 为极集，$P_x(h_B=\infty)=1$；利用二维布朗运动的常返性，得

$$E_x\int_0^{h_B} f(x_t)dt = E_x\int_0^{\infty} f(x_t)dt = \infty; \quad (16)$$

在(14)中令 $n\to\infty$，由(15)，(16)可见 $L_{B_n}(x)\uparrow\infty$.

次对非极集 B 证明(8). 此时(12)仍成立. 又

$$\int K\mu_B(x)f(x)dx + \int L_B(x)f(x)dx = R(B).$$

故为证 $R(B_n)\to R(B)$，只要证(12)左方二积分分别趋于上式左方二积分. 此时由于 $R(B_n)\leqslant R(B_{n+1})$，故必

$R(B_n)\uparrow R(B)$.

对 $x\in B^c\cup B^r$，仿(15),(16),有

$$\int g_{B_n}(x,y)f(y)dy\uparrow\int g_B(x,y)f(y)dy. \tag{17}$$

因 $P_x(x(h_{B_n})\in\bar{B}_1)=1$，$Af(z)$ 在 $\bar{B}_1$中连续，故由(11)右方及控制收敛定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\bar{B}_n} H_{B_n}(x,dz)Af(z)=\lim_{n\to\infty}E_xAf(x(h_{B_n}))$$

$$=E_xAf(x(h_B))=\int_{\bar{B}} H(x,dz)Af(z). \tag{18}$$

由§14(13)及(17)(18)得

$$\lim_{n\to\infty}L_{B_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\left[Af(x)-\int_{\bar{B}_n}H_{B_n}(x,dz)Af(z)+\int g_{B_n}(x,y)f(y)dy\right]=Af(x)-\int_{\bar{B}}H_B(x,dz)Af(z)+\int g_B(x,y)f(y)dy=L_B(x). \tag{19}$$

而且由 $L_A\geqslant L_B$ （如 $A\subset B$）知，$L_{B_n}(x)\uparrow L_B(x)$. 又因 $B\cap(B^r)^c$ 的 Lebesgue 测度为0,得

$$\int L_{B_n}(x)f(x)dx=\int_{B^c\cup B^r}L_{B_n}(x)f(x)dx\uparrow\int_{B^c\cup B^r}L_B(x)f(x)dx=\int L_B(x)f(x)dx. \tag{20}$$

剩下要考虑(12)中第一积分. 取圆 $D_r\supset\bar{B}$. 由§16(3)及控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int K\mu_{B_n}(x)f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\bar{B}_n}\mu_{B_n}(dx)Af(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\bar{B}_n}\left[\int_{S_r}H_{B_n}(\xi,dx)U_r(d\xi)\right]Af(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{S_r}\left[\int_{\overline{B}_n} Af(x)H_{B_n}(\xi, dx)\right]U_r(d\xi)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{S_r} E_\xi Af(x(h_{B_n}))U_r(d\xi)$$

$$= \int_{S_r} E_\xi Af(x(h_B))U_r(d\xi) = \int K\mu_B(x)f(x)dx.$$

ii) 只需考虑 U 为非极集情形. 仿 §6, 可找到紧集 $A_n \subset U$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $\bigcup_n A_n = U$, 而且 $P_x(h_{A_n} \downarrow h_U) = 1$. 取紧集 D, 使 $D \cap \overline{U}^c = \varnothing$. 又取连续函数 $f \geqslant 0$, 有紧支集 D, 又 $\int f(x)dx = 1$. 然后仿上述 i)中对非极集情况之证, 以 A_n 代 B_n, 以 U 代 B, 以 $\downarrow$ 代 $\uparrow$, 即可得证(9)#

细看定理 1 的证明(或稍加修改), 我们实际上已证明了:

系 1. i) 如 B_n 紧, $B_n \downarrow B$, 则对 $x \in B^r \cup B^c$, $L_{B_n}(x) \uparrow L_B(x)$; $R(B_n) \uparrow R(B)$.

ii) 如 B_n 紧, $B_n \uparrow B$, B 为相对紧, 则对一切 x, 有 $L_{B_n}(x) \downarrow L_B(x)$; 又 $R(B_n) \downarrow R(B)$.

(二) 以 $\mathbf{C}$ 表 R^2 中全体紧集之集. 定义

$$R^*(c) = -R(c), \quad c \in \mathbf{C}. \tag{21}$$

由(1)(2)及定理 1, 知 $R^*(\cdot)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的 Choquet 容度(参看 §9). 由容度的扩张定理, 可把 R^* 的定义域扩大到 $\mathscr{B}^2$ 上(甚至全体解析集上), 使对任意 $B \in \mathscr{B}^2$, 有

$$\begin{aligned} R^*(B) &= \sup(R^*(c): c \subset B, c \text{ 紧}) \\ &= \inf(R^*(0): 0 \supset B, 0 \text{ 开}). \end{aligned} \tag{22}$$

并且对任意 Borel 集 A, B, 有

$$R^*(A \cup B) + R^*(A \cap B) \leqslant R^*(A) + R^*(B). \tag{23}$$

又若 $A \subset B$, 则

$$R^*(A) \leqslant R^*(B). \tag{24}$$

它们是(1)(2)的延拓.

在§16中我们已对相对紧集A定义了 Robin 常数 $R(A)$. 今证明 $-R(A)$ 与扩张而得的 $R^*(A)$ 相等. 实际上,对任意紧集 $c\subset A$, 任意相对紧开集 $0\supset A$, 有 $-R(c)\leqslant -R(A)\leqslant -R(0)$, 故

$$R^*(A)\leqslant -R(A)\leqslant R^*(A),$$

即 $R^*(A)=-R(A)$ 对相对紧集A成立.

利用 R^* 的扩张自然得到 Robin 常数的扩张: 对任意 $B\in\mathscr{B}^2$, 定义

$$R(B)=-R^*(B). \tag{25}$$

于是关于 $R^*(B)$, $(B\in\mathscr{B}^2)$ 的结果, 可以通过 $R(B)$, $(B\in\mathscr{B}^2)$ 来表达. 特别,如(22)可改写为:

对任意 $B\in\mathscr{B}^2$, 有

$$\inf\{R(c):c\subset B, c\text{ 紧}\}=R(B)=\sup\{R(0):0\supset B, 0\text{ 开}\} \tag{26}$$

今对任意 $B\in\mathscr{B}^2$, 定义B的容度 $C(B)$ 为

$$C(B)=\exp\{-R(B)\}. \tag{27}$$

例如,由§16(24),圆 B_r 及圆周 S_r 的容度为

$$C(B_r)=C(S_r)=r^{1/\pi}, \quad (r>0). \tag{28}$$

容度有下列性质:

a) 如 $A\subset B$, 则 $C(A)\leqslant C(B)$.

b) 如 A 紧,则 $C(A)=C(\partial A)$.

c) 如 B_n 紧, $B_n\downarrow B$, 则 $C(B_n)\downarrow C(B)$.

d) 如 B_n 紧, $B_n\uparrow B$, B 相对紧,则 $C(B_n)\uparrow C(B)$.

实际上,由(24)得 a). 由§14(12),对 $x\bar{\in}A$, 有 $L_A^1(x)=L_{\partial A}^1(x)$, 故 $L_A(x)=L_{\partial A}(x)$. 于是由§16(12)得 b). 而 c), d) 则由系 1 推出.

显然, $C(B)=0$ 等价于 $R(B)=\infty$.

（三）**定理 2.** 设 $B\in\mathscr{B}^2$. 则 B 为极集的充要条件是 $C(B)=0$；换言之，$P_x(h_B<\infty)\equiv 1$ 或 $\equiv 0$，视 $C(B)>0$ 或 $=0$ 而定.

证. 如 B 为相对紧集，由 $R(B)$ 的定义及 §16 定理 2，知 $R(B)=\infty$ 与 B 为极集等价. 以下设 B 为非相对紧集. 设 $R(B)=\infty$. 由(26)知，$R(c)=\infty$ 对紧集 $c\subset B$ 成立；再由(26)，$R(D)=\infty$ 对相对紧集 $D\subset B$ 也成立，于是由上所证知 D 为极集. 由于 B 可表为可列多个相对紧集之和，故 B 为极集. 反之，设 B 为极集，则 B 的每个紧子集 c 为极集，由上所证 $R(c)=\infty$. 再由(26)得 $R(B)=\infty$. #

与 §11 定理 5 相应，有

定理 3. 设 B 为相对紧集，则 B 为极集的充要条件是

$$\sup_x K\mu(x)=\infty, \tag{29}$$

其中 μ 为任意非 0 有限测度，支集含于 B.

证. 任取相对紧开集 $A\supset\bar{B}$. 对 $N>0$，定义

$$k_N(x)=\begin{cases}k(x), & \text{如 } k(x)\geqslant -N;\\ -N, & \text{如 } k(x)<-N.\end{cases}$$

则有

$$-\int\mu(dx)\int k_N(y-x)\mu_A(dy)$$
$$=-\int\mu_A(dy)\int k_N(y-x)\mu(dx).$$

令 $N\uparrow\infty$，由单调收敛定理

$$\int_{\bar{B}}\mu(dx)K\mu_A(x)=\int_{\bar{A}}\mu_A(dx)K\mu(x). \tag{30}$$

由 §14(12)，如 $x\in\mathring{B}$，则 $L_B^{\circ}(x)=L_B(x)=0$. 因 $\bar{B}\subset A$，由 §16(13)，左方等于

$$\int_{\bar{B}}R(A)\mu(dx)-\int_{\bar{B}}L_A(x)\mu(dx)=R(A)\mu(\bar{B}).$$

据此式及(30),得

$$R(A)\mu(\bar{B}) \leqslant \sup_x K\mu(x)\cdot\mu_A(\bar{A}) = \sup_x K\mu(x).$$

由(26) $R(B)\mu(\bar{B}) \leqslant \sup_x K\mu(x)$.

今如 B 为极集,则 $R(B)=\infty$, 故 $\sup_x K\mu(x)=\infty$.

反之,设 $\sup_x K\mu(x)=\infty$ 对满足定理条件的一切 μ 成立,则 B 必为极集. 否则,如说 B 非极集,即 $R(B)<\infty$;取 B 的平衡测度 μ_B, 它满足定理条件. 但由 §16(13)

$$K\mu_B(x) \leqslant R(B) < \infty, \text{ 一切 } x.$$

此与假设矛盾∎

§18. 结 束 语

(一) M. Brelot 认为: 势论中有三大问题: Dirichlet 问题、Balayage 问题与平衡问题. 在牛顿势与对数势的情况,我们对这些问题作了简要论述, 阐明了它们与布朗运动的关系以及其概率解法. 但势论中还有许多问题, 如可加泛函、能、Martin 边界等,则未涉及.

(二) 牛顿势的一般化是格林 (Green) 势. 设 D 为 $R^n(n\geqslant 3)$ 中的开集,其格林函数为 $G_D^*(x,y)$, $(x,y\in D)$. 如 $D=R^n$, $G_D^*(x,y)$ 等于牛顿势核 $g(y-x)$. 在一般情况,可以仿照牛顿势而在 D 上建立格林势:

$$G_D\mu(x) = \int G_D^*(x,y)\mu(dy), \quad (\mu\subset D).$$

它所对应的过程是首出 D 以前的布朗运动 $\{x_t(\omega), t<e_D\}$, e_D 为 D 的首出时. 于是也可以研究格林势的平衡问题等等.

(三) 受布朗运动的启发, Hunt 等发展了一般马氏过程

(主要是所谓 Hunt 过程)与势论的联系. 为此,必须给出“势论”的一般定义;讨论那些可以用马氏过程的术语来表达的势论对象和运算. 例如,联系于每一马氏过程有它的“调和函数”“过份函数”,当此过程为布朗运动时,它们就分别化为本书中的调和函数与非负上调和函数.

本书的主要参考文章为[15,16];关于上述发展可见文献[11,1,8,17,18]以及新近的有关文献.

参考文献

[1] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Markov processes and potential theory, 1968.

[2] Burkholder, D. L., Brownian motion and classical analysis. Proceedings of Symp. in Pure Mathematics, Probability, 31, 5—14, (1977).

[2₁] Burkholder, D. L., Exit times of Brownian motion, harmonic majorization and Hardy Spaces, *Adv. in Math.*, 26, 182—205, (1977).

[3] Chung, K. L. Probabilistic approach in potential theory to the equilibrium problem, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 23, No. 3, 313—322. (1973).

[4] Ciesielski, Z. and Taylor, S. J., First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the Sample path, *Trans, Amer. Math. Soc.*, 103, 434—50, (1962).

[5] Гихман, и. и, Скороход А. В., Теория случайных процессов, Том. 2, 1973.

[6] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Vol. 2, 1962. (有中译本).

[7] Doob, J. L., Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. math. Soc.* 77, 86—121, (1954).

[8] Dynkin, E. B., Markov processes, 1965.

[9] Friedman, A., Stochastic differential equations and applications, 1975.

[10] Getoor, R. K., The Brownian escape process, *Ann. of Probability*, 7, 5, 864—867, (1979).

[10₁] Getoor, R. K., Sharpe, M. J. Excursions of Brownian motions and Bessel processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 47, 1, 83—106, (1979).

[11] Hunt, G. A., Markoff processes and potentials I, II, III, *Illinois J. Math.*, 1, 44—93; 316—69; (1957); 2, 151—213, (1958).

[12] Ito, K., and McKean, H. P., Diffusion processes and their sample path. 1965.

[13] Kakutani, S., Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20, 706—714. (1944).

[14] Kaar, A. F. and Pittenger A. O., An inverse Balayage problem for Brownian motion, *Ann. of Probability*, 7, 1, 186—191, (1979).

[15] Port, S. and Stone, C., Classical potential theory and Brownian motion, *Proc. Sixth. Berkeley Symp. Math Stat. and Probability*, 143—176, (1972).

[16] Port, S. and Stone, C., Logarithmic potential and planar Brownian motion, *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability*, 177—192, (1972).

[17] Port, S. C. and Stone, C. J., Brownian motion and classical potential theory, 1978.

[18] Rao, M., Brownian motion and classical potential theory, 1977.

[19] Spitzer, F. L., Electrostatic capacity, heat flow, and Brownian motion, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **3**, 110—121, (1964).

[20] Тихонов А. Н. Самарский А. А., Уравнения Математической физики 1953.

[21] 王梓坤，布朗运动的末遇分布与极大游程，中国科学，**10**，933—940，(1980).

[22] 王梓坤，随机过程论，1965，科学出版社.

[23] 王梓坤，对称稳定过程与布朗运动的随机波，中国科学，**12** 801—806 (1982).

[24] Дынкин, Е. Б., Основания теории Марковских процессов, 1962. (有中译本：马尔科夫过程论基础).

[25] La Vallée Poussin, CH. J. De, Léxtension de la médode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **2**(1932), 169—232.